Vragen, samenvattingen en uitwerkingen 2013 - Lineaire algebra 1 - UvA

Rocco van Vreumingen

28 juli 2016

Inhoudsopgave

1 Samenvattingen

1.1 Samenvatting stof college 1

Opmerking vooraf: alleen samenvattingen doornemen voor een toets zal misschien onvoldoende zijn, alleen al omdat je meerdere keren dezelfde, belangrijke trucjes moet gebruiken in oefenopgaves. Het kan zijn dat niet al die trucjes in de samenvattingen staan. Deze samenvattingen zijn meer bedoeld voor als je de stof nog nooit hebt doorgenomen uit het boek en je toch snel alle voorkennis paraat wil hebben alvorens aan de opgaves te beginnen.

Stel we hebben een stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x^2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

In matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(Bij het hoofdstuk over matrixvermenigvuldiging wordt dat duidelijk.)

We gaan het stelsel oplossen, maar voordat we dat doen, schrijven we het stelsel vergelijkingen zo op:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Op deze matrix kunnen we steeds een van de zogeheten drie *elementaire rijoperaties (ERO's)* toepassen, dwz we kunnen:

1) een rij nemen en vervolgens alle getallen van die rij met een reëel getal $\neq 0$ vermenigvuldigen. Ook wel, een rij vermenigvuldigen met een reëel getal $\neq 0$. Bijv.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 18 & 24 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

2) rijen omwisselen. Bijv. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 18 & 24 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 18 & 24 & 9 \end{pmatrix}$

3) eerst een rij R_i (de i-de rij) nemen. Bij R_i iets optellen, namelijk: een andere rij R_j met een reëel getal vermenigvuldigd.

Bijv. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 18 & 24 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3+(-1)*3 & 18+(-1)*4 & 24+(-1)*1 & 9+(-1)*8 \end{pmatrix}$.

Hier hebben we van R_3 een $R_3 + (-1)R_1$ gemaakt.

Het teken $\sim$ geeft aan dat we een ERO hebben toegepast. De twee matrices tussen $\sim$ noemen we *rij-equivalent*.

Om het stelsel op te lossen, moeten we de matrix in *trapvorm* brengen. Dwz we moeten toewerken naar een matrix waarvoor geldt dat: elke volgende rij met meer nullen begint dan de voorgaande, tenzij deze alleen nullen bevat. We zouden daarna ook nog, hoewel niet per se nodig, de matrix in *echelonvorm* kunnen brengen. Dat wil zeggen dat bij elke rij het meest linkse getal $\neq 0$, het *leidend element* genoemd, gelijk aan 1 is. Een matrix heet *rij-gereduceerd* als hij in echelonvorm is en alle kolommen met een leidend element erin kolommen zijn die alleen nullen hebben op het leidend element na.

We gaan de matrix in trapvorm brengen met de ERO's:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3+(-1)*3 & 18+(-1)*4 & 24+(-1)*1 & 9+(-1)*8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 14 & 23 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 30 \\ 0 & 14 & 23 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 22 \\ 0 & 14 & 23 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & -14 & 28 & 308 \\ 0 & 14 & 23 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & -14 & 28 & 308 \\ 0 & 0 & 51 & 309 \end{pmatrix}$$

Trapvorm bereikt. Nu ziet het stelsel vergelijkingen er zo uit:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ -14x_2 + 28x_3 = 308 \\ 51x_3 = 309 \end{cases}$$

Hieruit kunnen we opmaken wat x_3 is, vervolgens met de middelste vergelijking ook x_2 en dan x_1. Dit noemen we *achterwaartse substitutie*. In dit geval krijg je dan als *oplossingsverzameling* $\{(x_1, x_2, x_3)\}$ (de cardinaliteit is 1).

Een matrix in trapvorm kan kolommen hebben met een leidend element of zonder. Als de i-de kolom een leidend element heeft, dan noemen we de variabele x_i een *gebonden variabele* en anders een *vrije variabele*.

Een stelsel vergelijkingen *in trapvorm*
- is *onoplosbaar* als er een vergelijking vd vorm $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = p$ (*) met $p \neq 0$ is.
- heeft *precies 1 oplossing* als vergelijkingen van vorm (*) er niet zijn, en als er bovendien evenveel vergelijkingen ongelijk aan de vorm $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = 0$ (**) zijn als het aantal variabelen
- heeft *oneindig veel oplossingen* als vergelijkingen van de vorm (*) er niet zijn, en als er bovendien meer variabelen zijn dan vergelijkingen ongelijk aan de vorm $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = 0$. Hoeveel dat er meer zijn, is het aantal vrije variabelen.

Beschouw nu stelsels met parameters ipv bekende coëfficiënten. Om die op te lossen, moet je vaak gevalsonderscheid doen, wat bijv. wil zeggen: het aantal oplossingen afhankelijk van de parameter, wel of niet delen door nul. Maar probeer dit zo lang mogelijk uit te stellen.

1.2 Samenvatting stof college 2

Opmerking vooraf: alleen samenvattingen doornemen voor een toets zal misschien onvoldoende zijn, alleen al omdat je meerdere keren dezelfde, belangrijke trucjes moet gebruiken in oefenopgaves. Het kan zijn dat niet al die trucjes in de samenvattingen staan. Deze samenvattingen zijn meer bedoeld voor als je de stof nog nooit hebt doorgenomen uit het boek en je toch snel alle voorkennis paraat wil hebben alvorens aan de opgaves te beginnen.

Een (reële) $m \times n$ matrix is een matrix met m rijen en n kolommen. De verzameling van dit soort elementen is genoteerd als $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Een *vierkante matrix* is een matrix met evenveel rijen als kolommen.

Notatie: een $m \times n$ matrix A is $(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ waar de a_{ij} steeds de zogeheten *entries* zijn. Er wordt ook wel $(A)_{ij}$ genoteerd ipv a_{ij}.

Een matrix met maar één rij is een *rijmatrix* of *rijvector*. Evenzo voor kolommen. Rij-en kolomvectoren ter lengte n zijn elementen van resp. $\mathbb{R}^{1\times n}$ en $\mathbb{R}^{n\times 1}$, maar dat is verkort $\mathbb{R}^n$ (als er geen schrijfverwarring optreedt).

Een matrix bestaande uit alleen nullen is de *nulmatrix*, O genoteerd.

De elementen A_{ii} van een matrix A vormen de *hoofddiagonaal*.

De *getransponeerde matrix* van A, genoteerd als A^T, werkt als volgt.

Een element op plek ij breng je naar plek ji, $\forall\ i, j$.
Voorbeeld: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Stel $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$.
De volgende eigenschappen gelden: $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Een *symmetrische matrix* is een matrix waarvoor $A = A^T$.

Een *scheefsymmetrische matrix* is een matrix waarvoor $A = -A^T$.

Een *diagonaalmatrix* is een matrix waarbij $a_{ij} = 0$ als $i \neq j$.

Fix $n \in \mathbb{N}$ en beschouw $\mathbb{R}^{n\times n}$. De *eenheidsmatrix* bij deze verzameling is gedefinieerd als de diagonaalmatrix met op de hoofddiagonaal alleen enen. Notatie: $\mathbb{I}_n$.

Twee matrices A en B zijn op te tellen door alle entries van dezelfde plek op te tellen. Bijv. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Zelfde geldt voor $A - B$ (matrices aftrekken).

Als A een matrix is en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan is λA (of $A\lambda$) gedefinieerd door alle entries van A met λ te vermenigvuldigen. En $-A := (-1)A$.

Een rij van lengte n, zeg $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ en een kolom van lengte n, zeg $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ zijn te vermenigvuldigen als volgt: $a * b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.
(Maar dit is niet $b * a$).

Twee matrices A, B hebben product $C = AB$, gedefinieerd als volgt:
entry c_{ij} is gelijk aan rij i van A keer kolom j van B.

Matrixeigenschappen: $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$, $(AB)^T = B^T A^T$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $I_n B = B I_n = B$, $A(BC) = (AB)C$ (voor $\lambda \in \mathbb{R}$ en goede afmetingen).

Het *spoor* van een matrix is de som van de elementen van de hoofddiagonaal.

Als geldt $AB = I$, dan is B *rechtsinverse* van A en A *linksinverse* van B.

Stel je hebt de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. We laten zien hoe je een rechtsinverse bepaalt.
Bekijk dus de vergelijking $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} = I$.
Uit puur matrixvermenigvuldiging weten we dat $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nu is x_1, x_3, x_5 dus te bepalen uit rijvegen (ERO's toepassen). Op dezelfde manier kan dat ook voor x_2, x_4, x_6. Voila.

Stelling: Als een matrix A een linksinverse en een rechtsinverse heeft, dan heeft A maar één rechts- en één linksinverse, en die linkse en rechtse zijn gelijk aan elkaar. (Dus je hebt dan '*de* inverse van A'.)

Een $(n \times n)$-matrix A heet *inverteerbaar* of *regulier* als $\exists$ $(n \times n)$-matrix B die links- en rechtsinverse is van A. Dan heet B de *inverse matrix* van A, en die noteren we als A^{-1}.
Anders is A *niet-inverteerbaar* of *singulier*.

Als A en B inverteerbare matrices zijn met dezelfde afmetingen, dan geldt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Een *elementaire matrix* is een matrix die je krijgt door precies één ERO toe te passen op de eenheidsmatrix.

Een ERO toepassen op een matrix A is hetzelfde als die ERO toepassen op de eenheidsmatrix I en dan de verkregen matrix, zeg E, vermenigvuldigen met A, dwz $E * A$.

Stelling 1.35: Als A een elementaire matrix is, dan is die inverteerbaar. Zijn inverse is ook elementair, en deze correspondeert met hetzelfde type ERO als die van A.

Stelling 1.36: Stel A is een $(n \times n)$-matrix. Dan geldt het volgende:
A heeft een linksinverse $\Leftrightarrow$ het stelsel $AX = 0$ heeft precies één oplossing, nl. $X = 0 \Leftrightarrow A \sim I_n \Leftrightarrow A$ is product van elementaire matrices $\Leftrightarrow A$ is inverteerbaar $\Leftrightarrow A$ heeft een rechtsinverse.

Gegeven een matrix A is er (als gevolg van stelling 1.36) een manier om A^{-1} te vinden (als hij bestaat). Dit laten we zien in een voorbeeld.
Stel $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Plak I naast A en je krijgt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu rijvegen (ERO's toepassen) totdat je een matrix krijgt van de vorm $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... \\ 0 & 1 & ... & ... \end{pmatrix}$

Je krijgt in dit geval $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$. Dan is $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$ de inverse.

Een *bovendriehoeksmatrix* is een matrix met onder de hoofddiagonaal alleen nullen.

Voor meer samenvattingen, zie vanvreumingen.nl/Rocco en dan optie wiskunde - problemen en oplossingen.

1.3 Vragen hoofdstuk 1.7.1

OPGAVE 1)
Breng de volgende matrices in echelonvorm. Noteer zorgvuldig de uitgevoerde rij-operaties.
a) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -3 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

OPGAVE 2a)
Breng de volgende matrix in rijgereduceerde vorm. Noteer zorgvuldig de uitgevoerde rij-operaties.
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

OPGAVE 4)
Schrijf de oplossingsverzameling bij de volgende (in matrixvorm weergegeven) stelsels op:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4| & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2| & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3| & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0| & 5 \\ 0 & 1 & 0| & -2 \\ 0 & 0 & 0| & 4 \end{pmatrix}$

OPGAVE 5a)
Los het volgende homogene stelsel op:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + 8y + 14z = 0 \\ 2x + 6y + 11z = 0 \end{cases}$$

OPGAVE 6a)
Los het volgend stelsel op. Schrijf de oplossingsverzamelingen nauwkeurig op.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 6 \\ 3x + 8y + 14z = 16 \\ 2x + 6y + 11z = 12 \end{cases}$$

OPGAVE 10)
Bepaal alle koppels $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor het stelsel

$$\begin{cases} x_1 + hx_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = k \end{cases}$$

a) geen oplossing heeft, b) een unieke oplossing heeft, c) meerdere oplossingen heeft

OPGAVE 12c)
Bespreek volgende stelsels als functie van de parameter $k \in \mathbb{R}$. Hiermee wordt bedoeld, bepaal alle waarden van k waarvoor het stelsel geen oplossingen heeft, precies één oplossing heeft en oneindig veel oplossingen heeft. Heeft het stelsel oneindig veel oplossingen, bepaal dan ook hoeveel vrije variabelen er zijn naargelang de waarde van k.

$$\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ kx + y + (k+1)z = 0 \\ 2kx + y + z = k + 1 \end{cases}$$

1.4 Vragen hoofdstuk 1.7.2

OPGAVE 1)
Bereken $(AB)C$ en $C(AB)$ als

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

OPGAVE 2)
Als $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
bereken dan $(2A - B)C$ en CC^T. Wat kun je zeggen over de laatste matrix?

OPGAVE 3)
Vind een matrix B zodat $A + B^T = (A - B)^T$, gegeven dat $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

OPGAVE 6)

a) Vind een matrix B zdd $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, gegeven dat $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Vind een matrix C zdd $AC = A^2 + A$

OPGAVE 7a)
Bepaal de inverse van de volgende matrix, als die bestaat. Verifieer dat het product van de matrix en zijn inverse de eenheidsmatrix is. Schrijf de inverse en de matrix zelf als product van elementaire matrices,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

OPGAVE 13)
Stel A is een inverteerbare $(n \times n)$ matrix. Bewijs: als A symmetrisch is, dan ook A^{-1}.

OPGAVE 16a)
Een vierkante matrix heet nilpotent als $A^k = O$ voor een $k \in \mathbb{N}$. Bewijs dat een inverteerbare matrix nooit nilpotent is.

OPGAVE 23) Waar of onwaar? Leg uit met een kort bewijs of een tegenvoorbeeld.

a) Als A, B, C matrices zijn waarin A niet de nulmatrix is en zdd $AB = AC$, dan is $B = C$.

b) Als A, B matrices zijn met $AB = O$, dan is $A = O$ of $B = O$.

c) Als A, B matrices zijn met $A^2 = I$ en $B^2 = I$, dan geldt $(AB)^{-1} = BA$.

d) Als A, B inverteerbare matrices zijn, dan is ook $A + B$ inverteerbaar.

e) Als A, B en AB symmetrisch zijn, dan is $AB = BA$.

f) Als A, B beide symmetrisch zijn en met dezelfde afmetingen, dan is AB symmetrisch.

g) Als een vierkante matrix A niet inverteerbaar is, dan is AB niet inverteerbaar, wat B ook is.

h) Als E_1 en E_2 elementaire matrices zijn, dan is $E_1E_2 = E_2E_1$.

OPDRACHT 1.33.1)
Bewijs: als de matrix A inverteerbaar is, dan ook A^{-1} en dat dan
$(A^{-1})^{-1} = A$

OPDRACHT 1.33.3)
Toon aan dat, als de matrix B een kolom met alleen nullen heeft, dan ook AB een kolom met alleen nullen heeft. Formuleer en toon een analoog resultaat in termen van rijen van nullen aan. Concludeer dat zo'n B niet inverteerbaar is.

1.5 Vragen hoofdstuk 2

OPGAVE 1)
Bereken de determinant van de volgende matrices op twee manieren. De eerste maakt gebruik van de ontwikkeling naar een rij of kolom en de tweede gebruikt rijoperaties om een bovendriehoeksmatrix te verkijgen.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

OPGAVE 4)
Stel $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ met rijen $r_i \in \mathbb{R}^3$ en $\det(A) = -6$. Bepaal de determinant van de volgende matrices.

a) $\begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \\ r_1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3r_1 \\ -r_2 \\ 4r_3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

OPGAVE 8)
Bepaal alle $k \in \mathbb{R}$ waarvoor $\begin{pmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ 1 & k+2 & 1 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$ inverteerbaar is.

OPGAVE 9)
Stel F_n is het n-de Fibonacci-getal. Dus $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ en $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor $n \geq 3$. Bewijs:

$$\det \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

OPGAVE 10)
Voor $n \in \mathbb{N}_0$ definiëren we het getal d_n zijnde de determinant van de volgende $(n \times n)$ matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Schrijf d_n als een polynoom in n en bewijs dat je d_n zo kunt schrijven.

OPGAVE 12)

Bereken de cofactoren A_{11}, A_{12}, A_{13} en A_{33} als $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

OPGAVE 13) Leg uit waarom det $\begin{pmatrix} a & a^4 & a^7 \\ a^2 & a^5 & a^8 \\ a^3 & a^6 & a^9 \end{pmatrix}$

OPGAVE 16a) Bereken $\det(A)$, $adj(A)$, $det(adj(A))$ en A^{-1} voor de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

OPGAVE 23)
Geef zo mogelijk de oplossingen van het volgende stelsel m.b.v. de methode van Cramer.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

1.6 Vragen hoofdstuk 3

OPGAVE 1a)
Controleer of de verzameling $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ een vectorruimte is met de optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd als volgt:

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1)$ en $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$

b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ en $\lambda(x,y) = (x,y)$

c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + 2x_2, y_1 + 2y_2)$ en $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$

d) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ en $\lambda(x,y) = (\lambda x, y/\lambda)$ als $\lambda \neq 0$ en $0(x,y) = (0,0)$

OPGAVE 2e)
Is $W = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} = 0\}$ een deelruimte van $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

OPGAVE 2k)
Is $W' = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(-x) = -f(x)\}$ een deelruimte van de ruimte van alle functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$?

OPGAVE 4)
Voor $x, y \in \mathbb{R}^n$ en $k \in \mathbb{R}$ definiëren we $\oplus$ en $\cdot$ als volgt:

$$x \oplus y := x - y, \;\; k \cdot x = -kx$$

waarbij de bewerkingen in elk van de rechterleden beide het gewone verschil en gewone scalaire vermenigvuldiging zijn. Welke deeldefinities van een vectorruimte gaan op voor $\oplus$ en welke voor $\cdot$?

OPGAVE 6)
Stel dat U, W deelruimten zijn van een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Bewijs dat $U \cup W$ alleen een deelruimte van V is als $U \subseteq W$ of $W \subseteq U$.

OPGAVE 7)
Is $(3, -1, 0, -1)$ element van de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ die opgespannen is door $(2, -1, 3, 2)$,$(-1, 1, 1, -3)$ en $(1, 1, 9, -5)$?

OPGAVE 8)
Schrijf het polynoom $p(x) = -1 - 3x + 3x^2$ als lineaire combi van de polynomen
$p_1(x) := 1 + 2x + x^2$,
$p_2(x) := 2 + 5x$
en $p_3(x) := 3 + 8x - 2x^2$

OPGAVE 10)
Welk van de volgende verzamelingen zijn vrij?

a) $\{(1, 2, 0), (2, -1, 1), (1, 7, -1)\}$ in $\mathbb{R}^3$

b) $\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

c) $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\}$ in $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$

OPGAVE 13)
Bewijs dat $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$ een basis is voor de vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[X]_{\leq 2}, +)$. Bepaal de coördinaten van de vector $4-3x+x^2$ en de vector met coördinaten $(2, -3, 1)$ in deze basis.

OPGAVE 16)
Stel $v \in \mathbb{R}^4$ is de vector met coördinaten (a_1, a_2, a_3, a_4) t.o.v. de standaardbasis. Bepaal de coördinaten van v t.o.v. van de nieuwe basis

$$\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

OPGAVE 17)
Bepaal een basis en de dimensie van de volgende vectorruimtes.

a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$
b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0 \text{ en } 2x + y + z = 0\}$
c) $W_3 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A \text{ is een diagonaalmatrix en } \sum_{i=1}^{3} A_{ii} = 0\}$

OPGAVE 18)
Stel $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bewijs dat $AB = 0$ alleen als de kolomruimte van B een deelruimte is van de nulruimte van A.

OPGAVE 19)
Vind een basis voor de rijruimte, de kolomruimte en de nulruimte van de volgende matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

OPGAVE 25) Bewijs dat $U \oplus W = \mathbb{R}^{n\times n}$, waarbij U de deelruimte van symmetrische matrices $U = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\}$ en W de deelruimte van scheefsymmetrische matrices $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = -A^T\}$ is van de vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n}, +)$.

OPGAVE 27) Stel V is een deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ofwel van de ruimte van alle rijen in $\mathbb{R}$. Maar stel verder dat V alleen uit die rijen bestaat die voldoen aan $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

a) Stel dat $v_1 := (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$ en $v_2 := (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$ beide elementen zijn van V. Bewijs dat deze twee vectoren vrij zijn.

b) Stel $v_3 := (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) \in V$. Bewijs dat v_1, v_2 en v_3 lineair afhankelijk zijn.
c) Bewijs $\{v_1, v_2\}$ is een basis van V.

d) Bepaal de coördinaten van v_3 t.o.v. deze basis.

e) Bewijs dat V precies twee vectoren van de vorm $\{1, a, a^2, a^3, a^4, ...\}$ bevat en dat die ook een basis vormen van V.

f) Bepaal de co'ordinaten van v_3 t.o.v. deze laatste basis.

OPGAVE 29) Waar of onwaar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

a) Als α en β vrije delen zijn van een vectorruimte V, dan is de unie $\alpha \vee \beta$ ook vrij.

b) Als U en W deelruimtes zijn van een vectorruimte V en α is een basis van U en β een basis van W, dan is $\alpha \cap \beta$ een basis voor $U \cap W$.

c) Als U een deelruimte is van V en $v, w \in V$ zdd $v + w \in U$, dan is $v \in U$ en $w \in U$.

d) Stel V is een n-dimensionale vectorruimte, $U_i \subseteq V$ deelruimten van V voor $i = 1, 2, ..., r$ zdd

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq ... \subseteq U_r$$

Als $r > n + 1$ dan $\exists\ i < r$ waarvoor $U_i = U_{i+1}$.

e) Stel V is een vectorruimte met basis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Stel $W = vct\{e_1, e_2\}$. Dan $\exists$ basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ van V met $v_i \notin W$ voor $i = 1, 2, 3$.

OPGAVE 30)
Is $\mathbb{R}_0^+$ een vectorruitme als de optelling en scalaire vermenigvuldiging zo zijn gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \boxplus :\ & \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \\ & (x, y) \mapsto x \boxplus y = xy \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \odot :\ & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \\ & (\lambda, x) \mapsto \lambda \odot x = x^\lambda \end{aligned}$$

?

OPDRACHT 3.9)
Bewijs het volgende. In een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ geldt, voor alle vectoren $v \in V$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$, dit:

$$\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$$

OPDRACHT 3.29.1)
Ga na of, in een vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2}, +)$, de volgende vectoren vrij zijn:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

OPDRACHT 3.29.2)
Overtuig jezelf dat, in de vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[X], +)$, de verzameling $D = \{1, x, x^2, ..., x^k, ...\}$ een oneindige vrije verzameling is.

OPDRACHT 3.48.1)
Wat is de dimensie van de vectorruimte voortgebracht door de gegeven vectoren?

In $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +) : (1, 2, 0), (2, -1, 1)$ en $(1, 7, -1)$

In $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +) : (1, 1, -1, 2), (3, 1, -1, 1), (1, -1, 1, -3), (3, -1, 1, -4)$ en $(2, 1, -1, 0)$.

In $\mathbb{R}, \mathbb{R}[X]_{\leq 2}, +) : 1 + x,\ 1 + x^2$ en $x + x^2$.

In $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2}, +) : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$.

OPDRACHT 3.48.2)
Bewijs dat $\{(0, 2, 4, 1), (1, -1, 3, 1), (1, 5, 5, 1), (0, 8, -4, 1)\}$ een basis is van $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +)$. Wat zijn de coördinaten van $(1, 0, 0, 0)$ t.o.v. die basis?

OPDRACHT 3.48.3)
Werk in $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +)$ en beschouw $U = vct\{(4, 4, -4), (1, -1, 2), (3, 1, 0)\}$. Zoek de dimensie van U en bepaal een basis voor deze deelruimte. Zitten de vectoren $(1, 0, 0)$ en $(-4, -10, 13)$ wel of niet in U?
Zo ja, geef dan de coördinaten van deze vectoren t.o.v. de zelfgekozen basis.

OPDRACHT 3.48.4) Geef in $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +)$ twee verschillende basissen van

$$U = vct\{(1, 3, -1), (3, -1, 1), (3, 4, -1)\}$$

OPDRACHT 3.55) Een *even* functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is eentje waarvoor $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. En *oneven* als $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Bewijs:

1) alle even functies, resp. alle oneven functies, vormen een deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
2) de oneven functies vormen een complementaire deelruimte van de even functies.

Hint: $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

1.7 Vragen hoofdstuk 4

OPGAVE 1)
Welk van de volgende functies zijn lineair?
a) $L_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 1$

b) $L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$

c) $L_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x - y|$

d) $L_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (\sin(x), 7y, xy)$

e) $L_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (3y + z, x - y - z)$

g) $L_7 : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2} : A \mapsto A^T$

h) $L_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n \ (n > 1)$

i) $L_9 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] : Q \mapsto PQ \ voor P \in \mathbb{R}[X]$

j) $ev_a : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(a) \ voor a \in \mathbb{R}$

k) $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$

OPGAVE 7)
Bepaal het functievoorschrift van de volgende lineaire functies:

a) $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met $L(1, 2) = (0, -1)$ en $L(-1, -1) = (2, 1)$.

b) $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ met $L(1, 0, 0) = 1 + 3x^2$, $L(0, 1, 0) = 4 - 7x$ en $L(0, 0, 1) = -5 + 4x^2$.

c) $L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times2}$ met $L(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $L(4, 5, 6) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ en

$L(2,1,0) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

OPGAVE 8)
Bepaal de matrix van basisverandering tussen de volgende basissen:

a) $\alpha_1 = \{(5,1),(1,2)\}$ en $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ in $\mathbb{R}^2$

b) $\alpha_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$ en
$\beta = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

c) $\alpha_3 = \{3 + 2x + x^2,\ 4 - x^2,\ 2 + x\}$ en $\beta = \{x^2, x, 1\}$ in $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$.

OPGAVE 9)
Vind de matrixvoorstellingen T_α^α en T_β^β van de lineaire functie

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (2x - 3y + 4z, 5x - y + 2z, 4x + 7y),$$

waarbij $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ de standaardbasis is en $\beta = \{e_3, e_2, e_1\}$.

OPGAVE 10)
Beschouw de lineaire transformatie

$$T : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3} : f \mapsto f'' - 4f' + f$$

Vind de matrix T_α^α met $\alpha = \{x, 1 + x, x + x^2, x^3\}$.

OPGAVE 11)
Stel α is de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ en $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ een andere basis. Beschouw verder de lineaire functie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$T(x,y,z) = (x + 2y + z, -y, x + 4z)$$

a) Bereken de matrix van basisverandering van α naar β en de matrix van basisverandering van β naar α.

b) Bepaal de matrixvoorstelling van T t.o.v. α.

c) Bepaal de matrixvoorstelling van T t.o.v. β.

OPGAVE 13)
Stel $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bewijs: als A, B gelijkvormig zijn, dan ook A^2 en B^2 en veralgemeend:
dan zijn ook A^n, B^n gelijkvormig $\forall n \geq 2$.

OPGAVE 14)
Beschouw de lineaire functie

$$L : \mathbb{R}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{R}^2 : a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \mapsto (a + b, c + d + e)$$

en de basis $\alpha = \{1, 1 + x, (1 + x)^2, (1 + x)^3, (1 + x)^4\}$ voor $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[X]_{\leq 4}, +)$ en $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$ voor $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +)$.

a) Bepaal de matrix van basisverandering van α naar de standaardbasis ϵ van $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$.

b) Bepaal de coördinaten van de vector $x + x^3 + x^4$ t.o.v. de basis α.

c) Bepaal de matrixvoorstelling van L t.o.v. de standaardbasissen.

d) Bepaal de matrixvoorstelling van L t.o.v. de basissen α en β.

OPGAVE 16)
Bepaal de matrixvoorstelling van de lineaire functie

$$L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2} : (x, y, z, t) \mapsto L(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x + z & x + t \\ y - t & y + z \end{pmatrix}$$

t.o.v de basissen

$$\alpha = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$$

van $\mathbb{R}^4$ en

$$\beta = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

van $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

OPGAVE 17)
Beschouw de lineaire functie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ met matrixvoorstelling

$$L_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

t.o.v. de basissen $\alpha = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ en $\beta = \{(1,0),(1,1)\}$.

a) Bepaal een basis en de dimensie van ker(L) en Im(L).

b) Bepaal het functievoorschrift van de lineaire functie L.

OPGAVE 23)
Stel dat L een *idempotente* lineaire transformatie is van een vectorruimte V, dwz $L \circ L = L$.
Bewijs dat $V =$ker$(L)\oplus$Im(L).

OPGAVE 24)
Waar of onwaar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

a) Stel V, W zijn eindigdimensionale vectorruimten en $L : V \to W$ is een lineaire functie.
Dan $\exists$ deelruimte U van V zdd ker$(L)\cap U = \{0\}$ en Im$(L) = \{L(u) : u \in U\}$.

b) Stel V, W zijn eindigdimensionale vectorruimten. Dan $\exists$ surjectieve lineaire functie $L : V \to W$ alleen als dim(W) $\leq$dim(V).

OPDRACHT 4.9)
1) Een lineaire transformatie L van $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door zijn matrix

$$L_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

waar $\beta = \{(1,0,2),(0,2,1),(1,3,1)\}$. Bepaal $L(2,0,5)$.

2a) Vormt de verzameling $\{x^2+3, 3x-2, -2x^2+3x-4\}$ een basis van de vectorruimte $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$? Verklaar.

2b) Gegeven is de lineaire functie

$$L : (\mathbb{R}, \mathbb{R}[X]_{\leq 2}, +) \to (\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2}, +) : ax^2+bx+c \mapsto \begin{pmatrix} a+b & b-c \\ a-b & b+c \end{pmatrix}$$

Bepaal de matrix van L t.o.v. de basissen

$$\beta_1 = \{x^2+3, -2x^2+3x-4, 3x-2\}$$

en

$$\beta_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

2c) Bereken $L(-x^2+6x-3)$ door gebruik te maken van de matrixvoorstelling hierboven. Controleer het verkregen resultaat door vergelijking met een rechtstreekse berekening.

OPDRACHT 4.37)
Geef een voorbeeld van een vectorruimte V en een lineaire transformatie L van V die 1) injectief is maar niet surjectief, of 2) surjectief is maar niet injectief.

1.8 Vragen hoofdstuk 5

OPGAVE 1)
a) Bepaal alle eigenwaarden die bij minstens één idempotente matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ horen (idempotent betekent $A^2 = A$).

b) Stel $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is niet-singulier. Bepaal de eigenwaarden van A^{-1} in termen van die van A.

OPGAVE 2)
Stel $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\det(A) = -4$ en $Tr(A) = 3$. Bepaal de eigenwaarden van A.

OPGAVE 3)
Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

OPGAVE 4)
Welke van de volgende matrices zijn diagonaliseerbaar? Bepaal de eigenwaarden λ en de bijbehorende eigenruimten E_λ.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

OPGAVE 7)
Bepaal het functievoorschrift van de lineaire transformatie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met eigenwaarden $1, 2, 3$ en bijbehorende eigenvectoren $(2, -1, 0)$, $(-1, 2, -1)$ en $(0, -1, 2)$.

OPGAVE 8)
Beschouw de lineaire transformatie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met eigenwaarden $-1, 0, 1$ en bijbehorende eigenvectoren v_1, v_2, v_3. Bepaal $\ker(L)$ en $\mathrm{Im}(L)$.

OPGAVE 9) Bepaal een basis α voor de vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[X]_{\leq 2}, +)$ zdd de matrix L_α^α van de lineaire transformatie
$L : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2} : ax^2 + bx + c \mapsto (b + c)x^2 + (a + b)x + (a + c)$ t.o.v. de basis α diagonaal is.

OPGAVE 10)
Stel $(\mathbb{R}, V, +)$ is een 3-dimensionale vectorruimte en $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ een basis voor V. Beschouw de lineaire transformatie $T : V \to V$ gedefinieerd door

$$T(v_1) = 5v_1 + 2v_2 + 3v_3$$
$$T(v_2) = 2v_1 - v_2$$
$$T(v_3) = 3v_1 + v_3$$

a) Bereken de eigenwaarden van T.

b) Bereken de eigenruimte van T bij elke eigenwaarde.

c) Bestaat er een basis $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ van eigenvectoren voor T?

d) Zo ja, wat is de matrix van T t.o.v. de basis β?

e) Vind de matrix van basisverandering P van β naar α.

OPGAVE 11)
Stel T is de lineaire transformatie op $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gedefinieerd door:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+d & a+b+c \\ b+c+d & \\ a+c+d & \end{pmatrix}$$

Deze functie zal in opgave 6.15 terugkomen.

Bepaal de eigenwaarden van T, geef een basis voor elk van de eigenruimten en diagonaliseer T zo mogelijk.

OPGAVE 12)
Stel $T : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ is de lineaire transformatie gedefinieerd door $T(P(x)) = P(x) + xP'(x)$. Vind alle eigenwaarden van T en vind, zo mogelijk, een basis α voor $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ zdd T_α^α een diagonaalmatrix is.

OPGAVE 16)
Voor $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, bereken A^{10}.
OPGAVE 18)
a) Beschouw twee matrices $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Stel dat A drie verschillende reele eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heeft met respectieve eigenruimten $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ en E_{λ_3}. Stel verder dat B twee verschillende reële eigenwaarden μ_1 en μ_2 heeft met respectieve eigenruimten $E_{\mu_1} = vct(E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2})$ (de ruimte voortgebracht door E_{λ_1} en E_{λ_2}) en $E_{\mu_1} = E_{\lambda_3}$.

a) Bepaal de eigenwaarden met bijbehorende eigenruimten van AB die altijd eigenwaarden en eigenruimten zijn, ongeacht wat de waarden van $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en μ_1, μ_2 ook zijn.

b) Argumenteer dat $AB = BA$.

1.9 Vragen hoofdstuk 6

OPGAVE 1)
Bewijs dat $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2}, +, <.,.>)$, met

$$<.,.>: \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} : (A, B) \mapsto <A, B> = Tr(A^T B),$$

een Euclidische ruimte is. Bereken voor volgende vectoren hun lengte en voor elk tweetal vectoren hun inproduct, de afstand en de hoek ertussen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

OPGAVE 3)
Bewijs dat $\{(3, -3, 0), (2, 2, -1), (1, 1, 4)\}$ een orthogonale basis is voor de Euclidische ruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +, <.,.>)$.

OPGAVE 4)
Vind alle vectoren in $\mathbb{R}^3$ die orthogonaal zijn met $(1, 2, 0)$ en $(1, 0, 1)$ voor het standaard inproduct.

OPGAVE 5)
Stel $\alpha = \{(1, 2, 0), (1, 0, 1), (2, 3, 1)\}$ is een basis van $\mathbb{R}^3$. Pas de Gram-Schmidt methode toe om α om te vormen tot een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ t.o.v. het standaard inproduct.

OPGAVE 6)
Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ met standaardbasis $\alpha = \{1, x, x^2\}$ en inproduct $< f(x), g(x) > = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Pas Gram-Schmidt toe om α om te vormen tot een orthonormale basis van $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ t.o.v. het gegeven inproduct.

OPGAVE 7)
Vind een orthonormale basis voor de deelruimte W van de Euclidische ruimte

$\mathbb{R}^3$, gegeven door $x + 2y - z = 0$.

OPGAVE 8)
Bepaal het orthogonaal complement van de volgende deelruimten, telkens t.o.v. het standaard inproduct:

a) $U_1 := vct\{(1,1,1),(1,1,0)\}$ in $\mathbb{R}^3$

b) $U_2 := vct\{(1,1,1)\}$ in $\mathbb{R}^3$

c) $U_3 := vct\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

OPGAVE 9a)
Bewijs dat $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \,\text{is symmetrisch}\}^\perp = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \,\text{is scheefsymmetrisch}\}$ met $< A, B >= Tr(A^T B)$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$.
OPGAVE 10)
Stel $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ is een scheefsymmetrische matrix. Bewijs dat A geen reële eigenwaarden ongelijk nul kan hebben.

OPGAVE 11)
Bepaal een orthonormale basis α van eigenvectoren voor de lineaire transformatie
$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (a, b) \mapsto (2a-2b, -2a+5b)$. Bepaal ook de matrixvoorstelling T^α_α van T t.o.v. deze basis, en de orthogonale matrix P zdd $T^\alpha_\alpha = P^{-1}T^\epsilon_\epsilon P$ waarbij ϵ de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$ is.

OPGAVE 12)
Stel $a \in \mathbb{R}$ en

$$T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} : A \mapsto aA$$

Bepaal alle $a \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix van T t.o.v. de standaardbasis een orthogonale matrix is.

OPGAVE 14)
Vind een orthogonale matrix P zdd de volgende matrices A gelijkvormig zijn met een diagonaalmatrix $D = P^T AP$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

OPGAVE 15)

Bepaal een orthonormale basis α voor de vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2}, +)$ (met standaard inproduct), zdd de matrix L_α^α van de lineaire transformatie van opgave 5.11 diagonaal is.

OPGAVE 17)

a) We definiëren voor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ dat

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

Is dit een inproduct op de vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +)$?

b) Stel dat $< x, y >:= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_4y_4$ voor $x, y \in \mathbb{R}^4$. Dit is een inproduct (hoef je niet te bewijzen). Geef een orthonormale basis van de lineaire deelruimte $\text{vct}\{(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$ van $\mathbb{R}^4$ (t.o.v. dit inproduct).

OPGAVE 18)

Beschouw in $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +)$ een k-dimensionale deelruimte U en stel $W \subseteq U$ is een r-dimensionale deelruimte van U. Bewijs dat

$$U^{\perp\mathbb{R}^n} + W = (W^{\perp U})^{\perp\mathbb{R}^n},$$

waarbij het orthogonaal complement van de deelruimte in de expliciet vermelde vectorruimte genomen dient te worden, en dit telkens t.o.v. het standaard inproduct van $\mathbb{R}^n$.

BEWIJS STELLING 6.11)

OPDRACHT 6.8)

Beschouw de vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +)$ en ga na of volgende twee functies inproducten zijn hierop:

$$< .,. >_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \to 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2$$

$$< .,. >_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \to x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2$$

Verder waren er in de cursus van 2013 aanvullingen van de docent omtrent CSB-ongelijkheid en projecties. Ook daarvan heeft dit document uitwerkingen.

2 Uitwerkingen van de vragen 2013

2.1 Uitwerkingen hoofdstuk 1.7.1

OPGAVE 1a) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ — $(R_1- > 2R_1), (R_2- > 3R_2) \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ -6 & 21 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ — $(R_2- > R_2 + R_1) \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ — $(R_3- > 9R_3) \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 9 & 45 \end{pmatrix}$ — $(R_3- > R_3 - R_2) \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$ — $(R_1- > R_1/6), (R_2- > R_2/9), (R_3- > R_3/33) \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

OPGAVE 2a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ — $(R_2- > R_2 - 2R_1) \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & -2\\1 & 5 & 7\end{pmatrix} \text{ — } (R_3- > R_3 - R_1) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & -2\\0 & 4 & 4\end{pmatrix} \text{ — } (R_3- > R_3 - 4R_2) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 12\end{pmatrix} \text{ — } (R_3- > R_3/12) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ — } (R_1- > R_1 - R_2) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ — } (R_1- > R_1 - 5R_3) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ — } (R_2- > R_2 + 2R_3) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

OPGAVE 4a)
Noem het bijbehorende stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases}1a + 0b + 0c + 4d = -1\\0a + 1b + 0c + 2d = 6\\0a + 0b + 1c + 3d = 2\end{cases}.$$

Dan is $d = d$, $c = 2 - 3d$, $b = 6 - 2d$ en $a = -1 - 4d$.

Dus de oplossingsverz is $\{\begin{pmatrix}-1-4d\\6-2d\\2-3d\\d\end{pmatrix} : d \in \mathbb{R}\}$

OPGAVE 4b) $\{\emptyset\}$ (want strijdig)

OPGAVE 5a) Dit is hetzelfde als de volgende matrix oplossen:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\3 & 8 & 14 & 0\\2 & 6 & 11 & 0\end{pmatrix}$$

Dit is $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt $z = 0, y = 0, z = 0$.

OPGAVE 6a) Bijbehorende matrix is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 14 & 16 \\ 2 & 6 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

Bemerk dat de eerste 3 kolommen van deze matrix dezelfde zijn als die bij opg(5a). Als je bij deze matrix dezelfde ERO's uitvoert, dan weet je dus al wat de eerste 3 kolommen gaan worden. Dus je hoeft ze alleen uit te voeren bij de 4e kolom. Je krijgt uiteindelijk dit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dan wordt de oplossing $z = 2, y = -3, x = 4$, dus de oplosverz is $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

OPGAVE 10) Dit stelsel in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 2 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Dit is $\sim \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 3-2h & k-2 \end{pmatrix}$, de matrix die we gaan gebruiken.

a) Er moet een rij van de matrix van de vorm (*) zijn. Dat kan alleen gebeuren bij de 2e rij. Dit stelsel heeft geen oplossingen als $3 - 2h = 0$ en $k \neq 2$ ofwel $h = 3/2$ en $k \neq 2$.

b) Nu moet er precies 1 opl zijn. Ten eerste mag dan geen enkele rij van de matrix corresponderen met de vorm (*). In dit geval betekent dat dat de tweede rij niet van die vorm mag zijn.
Ten tweede, er zijn 2 variabelen, dus er moeten ook precies 2 vergelijkingen ongelijk aan de vorm (**) zijn. Ofwel, de tweede rij van de matrix mag niet corresponderen met de vorm (**). De twee eisen gecombineerd willen zeggen dat de tweede rij niet van de vorm $0x_1 + 0x_2 = r \in \mathbb{R}$ mag zijn. Dat is alleen zo voor $h \neq 3/2$.

c) De overige, nl $k = 2$ en $h = 3/2$ (stelling 1.26).

OPGAVE 12c) We schrijven dit eerst in matrixvorm en rijvegen:

$$\begin{pmatrix} k & k+1 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+1 & 0 \\ 2k & 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} k & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \\ 0 & -2k-1 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

We stellen nu $k \neq 0$ en doen $R_3 - > R_3 + R_2(2k+1)/-k$

Dan krijgen we: $\sim \begin{pmatrix} k & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \\ 0 & 0 & -2-2k & k+1 \end{pmatrix}$.

Nu hebben we een trapvorm. We kijken eerst wanneer de matrix onoplosbaar is. Dat hangt alleen van de derde rij af en het zou evt. kunnen als $k = -1$. Maar dan is $k+1$ ook nul, dus de matrix is voor alle k oplosbaar. We kijken wanneer de matrix precies 1 opl heeft. Omdat er 3 variabelen zijn en de eerste 2 vergelijkingen niet van de vorm (**) zijn, is de eis dat de derde vergelijking ook niet van die vorm is. Dat is alleen als $k \neq -1$. En oneindig veel opl zijn er alleen als $k = -1$.

We zijn nog niet klaar, want $k = 0$ hebben we nog niet bekeken. We nemen de matrix die we bij het rijvegen hadden net vóórdat we de aanname $k = 0$ deden. Die matrix vullen we in met $k = 0$. Dan krijgen we:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Rijvegen:

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vanwege de 2e rij is de laatste matrix onoplosbaar.

Dus onoplosbaar als $k = 0$, oneindig veel opl als $k = -1$ en precies 1 opl voor overige k.

Hoeveel vrije variabelen zijn er als $k = -1$? Er zijn 3 variabelen en 2 vergelijkingen ongelijk aan de vorm (**), dus het aantal vrije variabelen is $3 - 2 = 1$.

2.2 Uitwerkingen hoofdstuk 1.7.2

OPGAVE 1) $AB = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $C(AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ en $(AB)C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

OPGAVE 2) $(2A - B)C = (2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

OPGAVE 3) Bemerk dat $(A - B)^T = (A + (-1B))^T = A^T + (-1B)^T$ (eigenschap 1.16.2) $= A^T - 1B^T$ (eigenschap 1.16.3).

Dus $2B^T = A^T - A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -7 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt dat $B = \begin{pmatrix} 0 & -7/2 & 1/2 \\ 7/2 & 0 & 3/2 \\ -1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$

OPGAVE 6a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = A^{-1}AB = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

OPGAVE 6b) $AC = A^2 + A \Rightarrow A^{-1}AC = A^{-1}(A^2 + A) = A^{-1}A^2 + A^{-1}A = A + I$

We gaan A berekenen. Dit is de inverse van A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dus $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -12 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ dus $C = A + I = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -12 & 8 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

OPGAVE 7a) We gebruiken het algoritme van dit hoofdstuk om de inverse te bepalen en rijvegen:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\sim \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 21 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & -35 & -35 & -15 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\
\sim \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 21 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -8 & 14 & 10 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 210 & 105 & 315 & 105 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 63 & 21 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -8 & 14 & 10 \end{pmatrix} \\
\sim \begin{pmatrix} 210 & 0 & 252 & 84 & -42 & 0 \\ 0 & 105 & 63 & 21 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -8 & 14 & 10 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 210 & 0 & 252 & 84 & -42 & 0 \\ 0 & 105 & 63 & 21 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & -252 & -144 & 252 & 180 \end{pmatrix} \\
\sim \begin{pmatrix} 210 & 0 & 0 & -60 & 210 & 180 \\ 0 & 105 & 63 & 21 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & -252 & -144 & 252 & 180 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 210 & 0 & 0 & -60 & 210 & 180 \\ 0 & 420 & 252 & 84 & 168 & 0 \\ 0 & 0 & -252 & -144 & 252 & 180 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 210 & 0 & 0 & -60 & 210 & 180 \\ 0 & 420 & 252 & 84 & 168 & 0 \\ 0 & 0 & -252 & -144 & 252 & 180 \end{pmatrix} \\
\sim \begin{pmatrix} 210 & 0 & 0 & -60 & 210 & 180 \\ 0 & 420 & 0 & -60 & 420 & 180 \\ 0 & 0 & -252 & -144 & 252 & 180 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/7 & 1 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/7 & 1 & 3/7 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -1 & -5/7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Omdat ERO's toepassen correspondeert met vermenigvuldigen met elementaire matrices, en we van boven weten hoe we de gegeven matrix bij opg(7a) moeten rijvegen naar I_3, geldt het volgende, waarbij we de matrix van opg(7a) A noemen:

$$E_{14}E_{13}...E_1 * A = I$$

met E_i ($i \in \{1, 2, 3, ...15\}$) steeds de corresponderende elementaire matrix met de i-de ERO die we hebben gebruikt bij het rijvegen. We kunnen hier al uit afleiden hoe je A^{-1} schrijft als product van elementaire matrices. Er geldt wegens de net gegeven gelijkheid:

$$(E_{14}E_{13}...E_1 * A)A^{-1} = I * A_{-1}$$

Ofwel $E_{14}E_{13}...E_1 * (AA^{-1}) = A_{-1}$ en dan heb je dus $A^{-1} = E_{14}E_{13}...E_1$

OPGAVE 13) TB $(A^{-1})^T = A^{-1}$ ofwel TB $(A^{-1})^T$ is de inverse van A ofwel TB $A(A^{-1})^T = I$.

$A(A^{-1})^T = A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T$ (eigenschap 1.22.3c)$= I^T = I$.

OPGAVE 16a) Anders zou $A^k = O$ voor een $k \in \mathbb{N}$. Dan is dus ook $O = A^k(A^{-1})^k = A...AA(A^{-1})(A^{-1})...A^{-1} = I$ en dat klopt niet.

OPGAVE 23a) Fout.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = O$

OPGAVE 23b) Fout.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O$

OPGAVE 23c) Juist.
Dan is $A = A^{-1}$ en geldt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (stelling 1.32) $= BA$.

OPGAVE 23d) Fout.
Een som is niet altijd gedefinieerd :) Maar al waren de afmetingen juist, dan is hier een tegenvoorbeeld:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

OPGAVE 23e) Juist.
In dat geval is $AB = (AB)^T = B^TA^T = BA$.

OPGAVE 23f) Fout.
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ is een tegenvb. (Hier kom je op door of uit te

proberen en geluk te hebben. Andere manier is door bij de 1ste matrix op de, zeg n-de rij, alleen nullen in te vullen. Dan zal de matrix die ontstaat bij vermenigvuldiging, de resultaatmatrix, ook alleen nullen hebben op de n-de rij. Vervolgens kun je er dan voor zorgen dat de n-de kolom van de resultaatmatrix juist niet alleen uit nullen zal bestaan.)

OPGAVE 23g) Juist. Fixeer C als een matrix met dezelfde afmetingen als AB. Dan is $(AB)C = A(BC) \neq I$ want A is niet inverteerbaar. Omdat C willekeurig was, is AB niet inverteerbaar.

OPGAVE 23h) Fout.
Stel je hebt $\mathbb{I}_2$. Als je eerst $R_1 \to 2R_1$ doet en dan $R_2 \to R_2 + R_1$ dan krijg je $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Maar als je eerst $R_2 \to R_2 + R_1$ en dan pas $R_1 \to 2R_1$ dan krijg je $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Als je nu E_1 laat corresponderen met $R_1 \to 2R_1$ dan is $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en als je E_2 laat corresponderen met $R_2 \to R_2 + R_1$ dan is $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hiermee bereik je een tegenvb.

OPDRACHT 1.33.1) Er geldt $A^{-1}A = I$ en $AA^{-1} = I$, dus A^{-1} heeft A als zowel linkse als een rechtsinverse. Dus A is de inverse van A^{-1}, dwz $(A^{-1})^{-1} = A$ (en A^{-1} is inverteerbaar).

opdracht 1.33.2) Omdat A^T net als A vierkant is, kunnen we stelling 1.36 gebruiken. Dat scheelt, want nu hoeven we alleen nog maar een rechtsinverse voor A te vinden.
We hebben $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$, dus $(A^{-1})^T$ is de inverse van A^T.

OPDRACHT 1.33.3) Dit volgt uit matrixvermenigvuldiging. Als je elke rij van A vermenigvuldigt met de nulkolom van B, en stel dat dat de i-de kolom is, dan krijg je steeds nullen. Die nullen staan op de i-de kolom van AB.

Stel dat de i-de rij van A de nulrij is. Die rij vermenigvuldigd met een kolom van B levert nullen op. Dus op de i-de rij van AB staan allemaal nullen.

Je kunt voor geen enkele A schrijven $AB = I$, want we hebben voor alle A al gezien dat AB een nulkolom had. Dat heeft I nergens.

Voor meer samenvattingen, zie vanvreumingen.nl/Rocco en dan optie wiskunde - problemen en oplossingen.