Hints en uitwerkingen huiswerk 2013 Analyse 1 H10

Rocco van Vreumingen

22 augustus 2014

Inhoudsopgave

1 Hints 1 **3**

2 Hints 2 **3**

3 Hints 3 **4**

4 Hints 4 **4**

5 Hints 5 **4**

6 Hints 6 **5**

7 Hints 7 **5**

8 Hints 8 **5**

9 Hints 9 **5**

10 Hints 10 **5**

11 Antwoorden **5**

1 Hints 1

10.3) $s_n = K + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + ... + \frac{d_n}{10^n} \leq K + 9/10 + 9/10^2 + ... + 9/10^n$.

10.6a) TB $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n, m > N \Rightarrow |s_m - s_n| < \epsilon$.
Neem zvva aan dat $m \geq n$. Stel $\epsilon > 0$. Kies $N = ...$
Dan geeft $m \geq n > N$ dat ...

10.7) Eisen: 1) S begrensd, dus s_n begrensd
2) $\sup(S) \notin S$, dus $\sup(S) \notin s_n$
3) s_n zdd $\lim(s_n) = \sup(S)$.

10.8) Geen inductie, gwn in 1x TB $\sigma_n \leq \sigma_{n+1}$.

10.9b) Gebruik stelling 10.2. Dan bewijs je echter niet alleen dat de limiet bestaat, maar ook dat die convergeert. Maar dat is nodig bij (b) om dezelfde reden als bij (9.6).

10.9c) Hij lijkt op opgave 9.6

10.10d) Waarom is $s_n \leq 1\ \forall n$?

2 Hints 2

10.6a) Dan geeft $m \geq n > N$ dat
$|s_m - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| + |s_{n+2} - s_{n+1}| + ... + |s_m - s_{m-1}| < 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + ... + 2^{-(m-1)}$

10.7) Teken een plaatje van een simpele asymptotische kromme die naar $\sup(S)$ convergeert. En convergeren $\Rightarrow$ begrensd. Dus die kromme voldoet aan alle eisen. Je moet alleen nog de formule van deze kromme s_n maken.

10.8) $\sigma_n = \frac{s_1 + ... + s_n}{n} = \frac{(n+1)(s_1 + ... + s_n)}{n(n+1)}$
$\sigma_{n+1} = \frac{s_1 + ... + s_n + s_{n+1}}{n+1} = \frac{n(s_1 + ... + s_n + s_{n+1})}{n(n+1)}$

10.9b) Hij lijkt op vb 10.2

10.10d) Omdat de rij begint bij 1, en daarna alleen maar daalt wegens (c).

3 Hints 3

10.6a) Na de strikte ongelijkheid zie je een som van machten waarvan de exponenten allemaal steeds met 1 verschillen van elkaar. Zo scheelt $-n$ en $-(n+1)$ eentje, $-(n+1)$ en $-(n+2)$ scheelt eentje enz.

10.8) De laatste stap bij $\sigma_n = ...$ en de laatste stap bij $\sigma_{n+1} = ...$ kun je zo herschrijven, dat beide tellers een gelijke term krijgen.

10.9b) Er staat in (10.9c) dat lim = 0. Bovendien, als je s_n voor $n = 1, 2, 3, 4$ bekijkt, dan lijkt het of s_n naar 0 gaat vanuit 1. En je wil dat hij monotoon is. Dus TB $0 \leq s_{n+1} \leq s_n \leq 1 \ \forall n$.

4 Hints 4

10.6a) Gebruik dus opgave 9.18.

10.8) $\sigma_n = \frac{s_1+...+s_n}{n} = \frac{(n+1)(s_1+...+s_n)}{n(n+1)} = \frac{n(s_1+...+s_n)+s_1+...+s_n}{n(n+1)}$
$\sigma_{n+1} = \frac{s_1+...+s_n+s_{n+1}}{n+1} = \frac{n(s_1+...+s_n+s_{n+1})}{n(n+1)} = \frac{n(s_1+...+s_n)+n(s_{n+1})}{n(n+1)}$

10.9b) Je hebt nu 2 variabelen, nl s_{n+1} en s_n. Je zou beter een uitdrukking met gelijke variabelen hebben, omdat je daarvan beter kunt analyseren of de ene kleiner gelijk is aan de andere.
En, als je nu niets zou herschrijven aan "TB $0 \leq s_{n+1} \leq s_n \leq 1$"dan krijg je in de inductiestap een variabele die niet in de hypothese staat, dus daar kun je dan niet veel over zeggen.

5 Hints 5

10.6a) $2^{-n} + 2^{-(n+1)} + ... + 2^{-(m-1)} = (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + ... + 2^{-(m-1)}) - (1 + 2^{-1} + ... + 2^{-(n-1)}) = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^{m-1} - (1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^{n-1}) = \frac{1-(\frac{1}{2})^m}{1/2} - \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1/2}$

10.9b) TB $0 \leq (\frac{m}{m+1})s_{m+1}^2 \leq s_{m+1} \leq 1$

6 Hints 6

10.6a) $\frac{1-(\frac{1}{2})^m}{1/2} - \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1/2} = \frac{(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{2})^m}{1/2}$

7 Hints 7

10.6a) Omdat $m \geq n$ zvva, hoef je alleen maar een geschikte N te vinden $< n$.

8 Hints 8

10.6a) $\frac{(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{2})^m}{1/2} \leq \frac{2^{-n}}{2^{-1}}$

9 Hints 9

10 Hints 10

11 Antwoorden

10.3) $s_n = K + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + ... + \frac{d_n}{10^n} \leq K + 9/10 + 9/10^2 + ... + 9/10^n = K + 1 - \frac{1}{10^n} < K + 1$.

10.6a) TB $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n, m > N \Rightarrow |s_m - s_n| < \epsilon$.
Neem zvva aan dat $m \geq n$. Stel $\epsilon > 0$. Kies $N =^2 \log(1/\epsilon) + 1$
Dan geeft $m \geq n > N$ dat
$|s_m - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| + |s_{n+2} - s_{n+1}| + ... + |s_m - s_{m-1}| < 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + ... + 2^{-(m-1)} = (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + ... + 2^{-(m-1)}) - (1 + 2^{-1} + ... + 2^{-(n-1)}) = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^{m-1} - (1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^{n-1}) = \frac{1-(\frac{1}{2})^m}{1/2} - \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1/2} = \frac{(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{2})^m}{1/2} \leq \frac{2^{-n}}{2^{-1}} = 2^{-n+1} = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{N-1}} = \epsilon$

10.6b) Dit komt in H14 nog aan de orde, dat $\lim(1/2 + ... + 1/(n+1)) = \infty$ (*). Stel $|t_{n+1} - t_n| = 1/(n+1) < 1/n$. Stel dat de rij stijgt. Dan is $|s_m - s_n| = s_m - s_n = s_{n+1} - s_n + s_{n+2} - s_{n+1} + ... + s_m - s_{m-1} = |s_{n+1} - s_n| + ... + |s_m - s_{m-1}| = 1/(n+1) + ... + 1/(m+1)$. Als N gekozen is, dan zouden $\forall m, n > N$: $1/(n+1) + ... + 1/(m+1) < \epsilon$ en, zeg, $\epsilon = 1$. Maar vanwege (*) geldt $\lim_{m->\infty}(1/2 + ... + 1/(m+1)) = \infty$ en omdat $1/2 + 1/3 + ... + 1/n$ een eindig getal is, geldt dus ook $\lim_{m->\infty}(1/(n+1) + ... + 1/(m+1)) = \infty$, dus kun je een groot genoege m vinden zdd $|s_n - s_m| > 1 \Rightarrow$ niet Cauchy.

10.7) Eisen: 1) S begrensd, dus s_n begrensd

2) $\sup(S) \notin S$, dus $\sup(S) \notin s_n$
3) s_n zdd $\lim(s_n) = \sup(S)$.
Een goede rij is $s_n = \sup(S) - 1/2^n$ want
1) $\sup(S) - 1/2 \leq s_n \leq \sup(S)$
2) $s_n < \sup(S) \Rightarrow s_n \notin \sup(S)$
3) $\lim(s_n) = \lim(\sup(S)) - \lim(1/2^n) = \sup(S)$.

10.8) TB $\sigma_n \leq \sigma_{n+1}$.
$\sigma_n = \frac{s_1+...+s_n}{n} = \frac{(n+1)(s_1+...+s_n)}{n(n+1)} = \frac{n(s_1+...+s_n)+s_1+...+s_n}{n(n+1)}$
$\sigma_{n+1} = \frac{s_1+...+s_n+s_{n+1}}{n+1} = \frac{n(s_1+...+s_n+s_{n+1})}{n(n+1)} = \frac{n(s_1+...+s_n)+n(s_{n+1})}{n(n+1)}$
Als je de laatste stap bij $\sigma_n = ...$ en de laatste stap bij $\sigma_{n+1} = ...$ met elkaar vergelijkt, en erbij bedenkt dat s_n stijgend is, geldt idd $\sigma_n \leq \sigma_{n+1}$.

10.9a) $s_2 = 1/2, s_3 = 1/6, s_4 = \frac{3}{4} * \frac{1}{36} = 3/144$.

10.9b) TB $0 \leq s_{n+1} \leq s_n \leq 1$.
$n = 1$ geeft $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$, klopt.
Stel voor $n = m$ juist, dus $0 \leq s_{m+1} \leq s_m \leq 1$.
$n = m + 1$ geeft TB $0 \leq s_{m+2} \leq s_{m+1} \leq 1$ ofwel TB $0 \leq (\frac{m}{m+1})s_{m+1}^2 \leq s_{m+1} \leq 1$.
$s_{m+1} \leq 1$ vanwege hypothese.
$(\frac{m}{m+1})s_{m+1}^2 \leq s_{m+1}$, want stel $s_{m+1} = 0$ dan $0 \leq 0$, klopt.
Anders: $0 < s_{m+1}$ dus $(\frac{m}{m+1})s_{m+1} \leq 1$. Gegeven is $s_{m+1} \leq 1$, dus dat klopt.
$0 \leq (\frac{m}{m+1})s_{m+1}^2$, klopt ook want $m/(m+1), s_{m+1}^2 \geq 0$.

10.9c) $\lim(s_{n+1}) = \lim(\frac{n}{n+1})s_n^2 \Rightarrow \lim(s_n) = \lim(\frac{n}{n+1})\lim(s_n^2) \Rightarrow \lim(s_n) = 1 * \lim(s_n) * \lim(s_n) \Rightarrow (\lim(s_n))^2 - \lim(s_n) = 0 \Rightarrow \lim(s_n)(\lim(s_n) - 1) = 0 \Rightarrow \lim(s_n) = 0 \vee \lim(s_n) = 1$. Of: $\lim(s_n) = \infty \vee \lim(s_n) = -\infty$. Maar de laatste 2 kunnen niet omdat s_n convergeert. En $\lim(s_n) = 1$ k.n. want $s_2 = 1/2$ en s_n is monotoon dalend. Dus $\lim(s_n) = 0$.

10.10a) $s_2 = s_{1+1} = \frac{1}{3}(s_1 + 1) = \frac{1}{3}(1 + 1) = 2/3$; $s_3 = \frac{1}{3}(\frac{2}{3} + 1) = 5/9$; $s_4 = \frac{1}{3}(\frac{5}{9} + 1) = 14/27$

10.10b) voor $n = 1$ is $s_n = 1 > 1/2$, klopt.
Stel juist voor $n = m$, dus $s_m > 1/2$.
Dan is $s_{m+1} = \frac{1}{3}(s_m + 1) > \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{3}(\frac{3}{2}) = 1/2$.

10.10c) TB $s_n \geq s_{n+1} = \frac{1}{3}(s_n + 1)$ ofwel TB $\frac{2}{3}s_n \geq \frac{1}{3}$ ofwel TB $s_n \geq \frac{1}{2}$ en dat klopt wegens (b).

10.10d) TB $1/2 \leq s_{n+1} \leq s_n \leq 1 \; \forall n$.
De eerste ongelijkheid geldt wegens (b), de tweede wegens (c), de derde om-

dat $s_1 = 1$ en s_n dalend is.
Vanwege (c) en stelling 10.5 bestaat de limiet al, maar nu weten we dat die niet ∞ of $-\infty$ is.
$\lim(s_{n+1}) = \lim \frac{1}{3}(s_n + 1) \Rightarrow \lim(s_{n+1}) = \frac{1}{3}\lim(s_n + 1) \Rightarrow \lim(s_{n+1}) = \frac{1}{3}(\lim(s_n + \lim 1) \Rightarrow \lim(s_n) = \frac{1}{3}\lim(s_n) + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}\lim(s_n) = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim(s_n) = \frac{1}{2} \vee = \infty \vee = -\infty$.
Maar de laatste 2 opties kunnen niet, dus is het 1/2.