Hints en uitwerkingen huiswerk 2013 Analyse 1 H17

Rocco van Vreumingen

22 augustus 2014

Inhoudsopgave

1 Hints 1

17.4) Gebruik vb 8.5.

17.5a) Probeer inductie.

17.5b) Definities van continu gebruiken is niet nodig.

17.6) p en q zijn polynomen en zijn dus continu.

17.9a) TB $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ zdd $x \in \text{dom}(f)$, $|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \epsilon$.
Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = ...$
Dan geeft $|x-2| < \delta$ dat $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| * |x+2|$

17.9c) Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = \epsilon$.
Dan geeft $x \in$dom(f) en $|x-0| < \delta$ ofwel $|x| < \delta$ dat $|f(x)-f(0)| = |f(x)| = |x\sin(1/x)| = |x| * |\sin(1/x)| \leq |x| * 1$

17.9d) Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = ...$
Dan geeft $x \in$dom(f) en $|x - x_0| < \delta$ dat $|f(x) - f(x_0)| = |x^3 - x_0^3| = |(x-x_0)(x^2 + x_0x + x_0^2)| = |x - x_0| * |x^2 + x_0x + x_0^2| < \delta|x^2 + x_0x + x_0^2|$.

17.12a) f is continu op (a, b) ofwel als rij $x_n \in \text{dom}(f)$ naar $x_0 \in (a, b)$ convergeert, dan is $\lim(f(x_n)) = f(x_0)$. En verder, je weet dat $f(r) = 0$ $\forall r \in \mathbb{Q}$ en hoeft dus alleen nog maar TB dat $f(p) = 0\ \forall$ irrationale getallen. Als je nu een rij x_n met alleen rationale x_n maakt, dan staat er binnen enkele tussenstappen $\lim(0) = f(x_0)$. En die $f(x_0)$ kan dan nog maar 1 ding zijn.

17.12b) Je moet (a) gebruiken, dus je moet een functie, zeg h zien te vinden waarvoor geldt $h(r) = 0\ \forall$ rationale $r \in (a, b)$. Omdat $f(r) = g(r)$ kun je net zo goed zeggen $f(r) - g(r) = 0$.

17.14a) Het idee is dat er binnen een klein interval met x_0 erin, geen breuken meer voorkomen met een kleine noemer. Je weet dat x_0 tussen 2 gehele getallen ligt. Neem het interval $[\lfloor x_0 \rfloor, \lceil x_0 \rceil]$ en beschouw alle zo ver mogelijk vereenvoudigde breuken met noemer$= 1$ t/m noemer$= N$ die daarin liggen. Geen 1 daarvan zal gelijk zijn aan x_0, maar er is er zeker 1 bij die er het dichtst bij zit. Als je nu alle breuken beschouwt die nog dichter bij x_0 zitten, dan zul je er geen 1 meer aantreffen die te schrijven is met $noemer \leq N$. Die breuken zijn nl al geweest.

17.14b) Maak opgave 7.4a nog eens, maar maak nu een rij die convergeert naar $x_0 \in \mathbb{Q}$ (evt met uitzondering op een aantal getallen). Dat is handig voor de definitie van een limiet, want de f van een irrationale rij is altijd 0, gaat dus ook naar 0, terwijl de f van een breuk niet 0 is.

2 Hints 2

17.5b) Gebruik in plaats daarvan de stellingen die in dit hoofdstuk aan bod zijn gekomen.

17.6) Er staat bovendien een gedeelddoorteken bij, dus kun je stelling 17.4iii gebruiken.

17.9a)Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = ...$
Dan geeft $|x-2| < \delta$ dat $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| * |x+2| \leq |x-2| * |x-2+4|$

17.9d) Omdat x geen constant getal is en ook geen ϵ, maar wel voorkomt in de uitdrukking $\delta|x^2 + x_0x + x_0^2|$ die je nu hebt, moet je nog even doorgaan met herschrijven en afschatten.

17.12a) In opgave 7.4b moest je een voorbeeld noemen van een rij x_n met alleen rationale x_n die convergeert naar een reëel getal. Maar het moeten in deze opgave wel allemaal getallen zijn binnen domein (a, b) en het reële getal moet nou net x_0 zijn. Maak opgave 7.4b opnieuw. Dat is handig, want in die opgave hoefde niets te bewijzen maar je mag die opgave wel voor alle andere opgaves gebruiken.

17.14a) Stel p is de breuk die het dichtste bij x_0 ligt. Beschouw een x die nog dichterbij ligt. Dan krijg je dat $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 0| = f(x) < 1/N$. Wat is nu een geschikte δ om te kiezen?

17.14b) Definieer $x_n = a_1, a_2a_3...a_n$ een decimale benadering van $\sqrt{2}$. Natuurlijk gaat die rij naar $\sqrt{2}$ en die is irrationaal, maar de rij $\sqrt{2}x_n$ doet wat anders :D

3 Hints 3

17.9a) Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = ...$
Dan geeft $|x-2| < \delta$ dat $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| =$

$|x-2|*|x+2| \leq |x-2|*|x-2+4| \leq |x-2|(|x-2|+|4|) < \delta(\delta+4)$

17.9d) Bij een vorige deelopgave veranderde je een $x+x_0$ in een $x-x_0+2x_0$. Ook hier moet je op een of andere manier een $x-x_0$ erin zien te herschrijven.

17.12a) Stel dat x_0 een irrationaal getal is en schrijf 'm uit met decimalen. Dus $x_0 = a_1, a_2a_3a_4....$

17.14a) Formeel is nu $|x-x_0| < |p-x_0|$. Als $\delta = |p-x_0|$ dan krijg je $|x-x_0| < \delta$.

17.14b) We maken opgave 7.4a nog eens, maar dan zo dat x_0 een willekeurig rationaal getal ongelijk 0 is.
Definieer $x_n = a_1, a_2a_3...a_n$ een decimale benadering van $\sqrt{2}$. Dan gaat de rij $t_n = x_n * \sqrt{2} * \frac{x_0}{2}$ naar x_0. Stel dat elk getal van deze rij rationaal is, dus $x_n * \sqrt{2} * \frac{x_0}{2} = m/n$ met $m/n \in \mathbb{Q}$, dan is $\sqrt{2} = (m/n)\frac{2}{x_0}/x_n$. Dan kom je er dus op uit dat $\sqrt{2}$ rationaal is $\forall n$ en dat is onzin. Dus elke t_n is irrationaal en $t_n \to x_0$. Nu krijg je: $t_n \in$dom(f) is een rij naar $x_0 \Rightarrow \lim(f(t_n)) = 0 \neq f(x_0)$. EN, stel nu apart dat $x_0 = 0$.

4 Hints 4

17.9d) Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = ...$
Dan geeft $x \in$dom(f) en $|x-x_0| < \delta$ dat $|f(x)-f(x_0)| = |x^3-x_0^3| = |(x-x_0)(x^2+x_0x+x_0^2)| = |x-x_0|*|x^2+x_0x+x_0^2| < \delta|x^2+x_0x+x_0^2| = \delta|(x-x_0+x_0)^2+x_0(x-x_0+x_0)+x_0^2|$

17.12a) Het leuke is dat alle getallen die je kunt schrijven in een eindig aantal decimalen, die zijn allemaal rationaal.

5 Hints 5

17.9d) Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = ...$
Dan geeft $x \in$dom(f) en $|x-x_0| < \delta$ dat $|f(x)-f(x_0)| = |x^3-x_0^3| = |(x-x_0)(x^2+x_0x+x_0^2)| = |x-x_0|*|x^2+x_0x+x_0^2| < \delta|x^2+x_0x+x_0^2| = \delta|(x-x_0+x_0)^2+x_0(x-x_0+x_0)+x_0^2|$

17.12a) Definieer nu $x_n = a_1, a_2a_3...a_n$. Dat is een rationale rij $x_n \to x_0$.

6 Hints 6

17.9d) Maar je hebt pas echt wat aan $x - x_0$ als je er absoluutstokken omheen hebt. Daar kun je aan komen als je absoluutstokken om je deeluitdrukking $x - x_0 + x_0$ hebt. Daarna kun je namelijk de 3hoeksongelijkheid gebruiken. Als je absoluutstokken om $x - x_0 + x_0$ wil hebben, dan moet je nog wel een herschrijving uitvoeren met $\delta|(x - x_0 + x_0)^2 + x_0(x - x_0 + x_0) + x_0^2|$.

17.12a) Maar niet alle getallen van deze rij zitten per se in het domein (a, b). Die getallen moet je weggooien. En de getallen die je dan overhoudt, vormen dan je nieuwe rij.

7 Hints 7

17.9d) $|x - x_0| < \delta$ dat $|f(x) - f(x_0)| = |x^3 - x_0^3| = |(x - x_0)(x^2 + x_0 x + x_0^2)| = |x - x_0| * |x^2 + x_0 x + x_0^2| < \delta|x^2 + x_0 x + x_0^2| = \delta|(x - x_0 + x_0)^2 + x_0(x - x_0 + x_0) + x_0^2| \leq \delta(|(x - x_0 + x_0)^2| + |x_0(x - x_0 + x_0)| + |x_0^2|)$

8 Hints 8

17.9d) $|f(x) - f(x_0)| = |x^3 - x_0^3| = |(x - x_0)(x^2 + x_0 x + x_0^2)| = |x - x_0| * |x^2 + x_0 x + x_0^2| < \delta|x^2 + x_0 x + x_0^2| = \delta|(x - x_0 + x_0)^2 + x_0(x - x_0 + x_0) + x_0^2| \leq \delta(|(x - x_0 + x_0)^2| + |x_0(x - x_0 + x_0)| + |x_0^2|) = \delta(|x - x_0 + x_0| * |x - x_0 + x_0| + |x_0| * |x - x_0 + x_0| + x_0^2) \leq \delta[(|x - x_0| + |x_0|)^2 + |x_0|(|x - x_0| + |x_0|) + x_0^2] < \delta[(\delta + |x_0|)^2 + |x_0|(\delta + |x_0|) + x_0^2]$
Nu heb je een uitdrukking in de vorm $\delta($<<subuitdrukking met alleen δ en x_0 erin>>$)$. Net als dat je bij (a) dat had met $\delta(\delta + 4)$.

9 Hints 9

10 Hints 10

11 Antwoorden

17.1a) $(-\infty, 4]$; $(-\infty, 4]$; $[-2, 2]$; $(-\infty, \infty)$
17.1b) $2; 4; \sqrt{3}; 3; 0; 2$
17.1c) Nee
17.1d) Nee, want $f(g(3))$ is niet gedefinieerd.

17.2a) $(f+g)(x) = \begin{cases} 4 + x^2 & \text{als } x \geq 0 \\ x^2 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

$fg(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

$f(g(x)) = f(x^2) = \begin{cases} 4 & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases} = 4$

$g(f(x)) = \begin{cases} g(4) & \text{als } x \geq 0 \\ g(0) & \text{als } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 16 & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

17.2b) fg en $f(g)$

17.4) TB $f(x) = \sqrt{x}$ continu op alle $x_0 \in [0, \infty)$
ofwel TB als rij $x_n \in \text{dom}(f)$ naar $x_0 \in [0, \infty)$ convergeert, dan is $\lim(f(x_n)) = f(x_0)$
ofwel TB als rij $x_n \longrightarrow x_0$ waarbij $x \in [0, \infty)$ dan is $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x_0}$. Dat geldt met vb 8.5.

17.5a) Stel $g(x) = x$.
Eerst TB x continu op $\mathbb{R}$ ofwel TB als rij $x_n \in \text{dom}(g)$ convergeert naar $x_0 \in \mathbb{R}$ dan $\lim f(x_n) = f(x_0)$ ofwel TB als rij $x_n \longrightarrow x_0$ met $x \in \mathbb{R}$ dan $\lim(x_n) = x_0$. Dat klopt sws. Dus x continu op $\mathbb{R}$.
Stel dat x^m continu is op $\mathbb{R}$. Dan is $x^{m+1} = x^m * x$ dat ook, omdat nu zowel x als x^m dat zijn (stelling 17.4ii). Dus de opgavestelling klopt.

17.5b) Met stelling 17.3 en opgave 17.5a geldt dat ax^m continu op $\mathbb{R}$, met $a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$. Een constante functie is sws continu op $\mathbb{R}$. Nu geldt met stelling 17.4i dat $p(x)$ continu op $\mathbb{R}$.

17.6) p en q zijn polynomen, dus die zijn met opgave 17.5b continu op $\mathbb{R}$. Met stelling 17.4iii geldt dat p/q continu is op $x_0 \in \mathbb{R}$ als $q(x) \notin 0$. Ofwel continu op $\text{dom}(f)$ ofwel continu.

17.9a) Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = \min\{1, \frac{1}{5}\epsilon\}$.
Dan geeft $x \in \text{dom}(f)$ en $|x-2| < \delta$ dat $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| * |x+2| \leq |x-2| * |x-2+4| \leq |x-2|(|x-2|+|4|) < \delta(\delta+4) \leq \frac{1}{5}\epsilon(1+4) = \epsilon$

17.9b) Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = \epsilon^2$.
Dan geeft $x \in \text{dom}(f)$ en $|x-0| < \delta$ ofwel $x < \delta$ dat $|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \epsilon$

17.9c) Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = \epsilon$.
Dan geeft $x \in \text{dom}(f)$ en $|x-0| < \delta$ ofwel $|x| < \delta$ dat $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x \sin(1/x)| = |x| * |\sin(1/x)| \leq |x| * 1 = |x| < \delta = \epsilon$

17.9d) Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = \min(1, \epsilon/(1 + 3|x_0| + 3x_0^2))$.
Dan geeft $x \in \text{dom}(f)$ en $|x - x_0| < \delta$ dat $|f(x) - f(x_0)| = |x^3 - x_0^3| = |(x-x_0)(x^2 + x_0x + x_0^2)| = |x - x_0| * |x^2 + x_0x + x_0^2| < \delta|x^2 + x_0x + x_0^2| = \delta|(x - x_0 + x_0)^2 + x_0(x - x_0 + x_0) + x_0^2| \leq \delta(|(x - x_0 + x_0)^2| + |x_0(x - x_0 + x_0)| + |x_0^2|) = \delta(|x - x_0 + x_0| * |x - x_0 + x_0| + |x_0| * |x - x_0 + x_0| + x_0^2) \leq \delta[(|x - x_0| + |x_0|)^2 + |x_0|(|x - x_0| + |x_0|) + x_0^2] < \delta[(\delta + |x_0|)^2 + |x_0|(\delta + |x_0|) + x_0^2] = \delta(\delta^2 + 2\delta|x_0| + x_0^2 + \delta|x_0| + x_0^2 + x_0^2) = \delta(\delta^2 + 3\delta|x_0| + 3x_0^2) \leq \delta(1 + 3 * 1|x_0| + 3x_0^2) = \epsilon/(1 + 3|x_0| + 3x_0^2) * (1 + 3|x_0| + 3x_0^2) = \epsilon$

17.12a) f is continu op (a,b) ofwel als rij $x_n \in \text{dom}(f)$ naar $x_0 \in (a,b)$ convergeert, dan is $\lim(f(x_n)) = f(x_0)$. We maken opgave 7.4b opnieuw. Maar het moeten deze keer wel allemaal getallen zijn binnen domein (a,b) en het reële getal moet nou net x_0 zijn. Stel dat x_0 een irrationaal getal is en schrijf 'm uit met decimalen. Dus $x_0 = a_1, a_2a_3a_4....$ Definieer nu $x_n = a_1, a_2a_3...a_n$. Dat is een rationale rij $x_n \to x_0$. De eerste, zeg m getallen vallen buiten het domein, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Maar die gooi je gwn weg en houdt een nieuwe rij x_n over die wel geheel in (a,b) zit. Nu is $f(x_0) = \lim(f(x_n)) = \lim(0) = 0$. Dus de opgavestelling is juist.

17.12b) Omdat f en g beide continu zijn op (a,b), is ook $f - g$ continu op (a,b). En $f(r) = g(r)$ $\forall$ rationale $r \in (a,b)$, ofwel $(f-g)(r) = 0$. Wegens (a) is dus $(f-g)(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ ofwel $f(x) = g(x)$.

17.14a) TB f is continu op x_0 met $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ zdd $x \in \text{dom}(f)$ en $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$. Beschouw de gehele getallen waartussen x_0 ligt. Kies $N = \lceil 1/\epsilon \rceil$. Beschouw verder alle zo ver mogelijk vereenvoudigde breuken met noemer 1 t/m N tussen die gehele getallen. 1 van die getallen ligt het dichtst bij x_0, zeg p. Kies $\delta = |x_0 - p|$. Dan geeft $|x - x_0| < \delta$ dat $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 0| = f(x) < 1/N \leq \epsilon$.

17.14b) We maken opgave 7.4a nog eens, maar dan zo dat x_0 een willekeurig rationaal getal ongelijk 0 is.
Definieer $x_n = a_1, a_2 a_3 ... a_n$ een decimale benadering van $\sqrt{2}$. Dan gaat de rij $t_n = x_n * \sqrt{2} * \frac{x_0}{2}$ naar x_0. Stel dat elk getal van deze rij rationaal is, dus $x_n * \sqrt{2} * \frac{x_0}{2} = m/n$ met $m/n \in \mathbb{Q}$, dan is $\sqrt{2} = (m/n)\frac{2}{x_0}/x_n$. Dan kom je er dus op uit dat $\sqrt{2}$ rationaal is $\forall n$ en dat is onzin. Dus elke t_n is irrationaal en $t_n \to x_0$. Nu krijg je: $t_n \in$dom(f) is een rij naar $x_0 \Rightarrow \lim(f(t_n)) = 0 \neq f(x_0)$. EN, stel nu apart dat $x_0 = 0$. Definieer $p_n = (1/n)\pi$. Die is $\forall n$ irrationaal en gaat naar 0. Je krijgt: $p_n \in$dom(f) is een rij naar $x_0 \Rightarrow \lim(f(x_n)) = 0 \neq f(x_0)$.