Hints en uitwerkingen huiswerk 2013 Analyse 1 H18

Rocco van Vreumingen

29 augustus 2014

Inhoudsopgave

1 Opmerkingen

De middelwaardestelling kan ook worden gebruikt met kleinergelijktekens. Nu staat er: als $a < b$ en y ligt strikt tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan $\exists\ x$ zdd $y = f(x)$. Maar in vb 1 kun je zien dat die y ook gelijk mag zijn aan $f(a)$ of $f(b)$. Dus je kunt de middelwaardestelling herschrijven als volgt: als $a < b$ en y is zdd $f(a) \leq y \leq f(b)$, dan $\exists\ x$ zdd $y = f(x)$. Zou de stelling ook juist zijn als $a \leq b$? Stel nu dat $a = b$. Als dat zo is, en $f(a) \leq y \leq f(b)$ dan geldt $f(a) = f(b)$, dus $f(a) = y = f(b)$ en dan ben je snel klaar omdat $x = a$ en $x = b$ al voldoen aan $y = f(x)$, dus dan bestaat een juiste x echt wel.

2 Hints 1

18.5a) Hij lijkt op vb 18.2. Als je een plaatje ervan maakt, dan zie je weer een snijpunt. Dus definieer $h(x) = f(x) - g(x)$ (of $g(x) - f(x)$).

18.5b) Voor de functie g in opgave 18.5a is in het voorbeeld $g(x) = x$ genomen.

18.6) Stel eerst dat het een gesloten interval is en bewijs met de middelwaardestelling dat er zo'n x is. Net als dat in vb 1 de middelwaardestelling wordt gebruikt in een gesloten interval. Het enige wat dan nog dwars zit, is dat de gevonden x gelijk kan zijn aan 0 of $\pi/2$.

18.10) TB $\exists x, y \in [0, 2]$ zdd $|y - x| = 1$ en $f(x) = f(y)$ ofwel TB $\exists x \in [0, 1]$ zdd $f(x + 1) - f(x) = 0$.

18.12a) Je hoeft hier niets te bewijzen. Er staat nl alleen "Observe".

18.12b) Voor een groot deel is de functie continu en voor bepaalde gevallen kun je dus gwn gelijk de middelwaardestelling toepassen.

3 Hints 2

18.10) TB $\exists x, y \in [0, 2]$ zdd $|y - x| = 1$ en $f(x) = f(y)$ ofwel TB $\exists x \in [0, 1]$ zdd $f(x + 1) - f(x) = 0$.
$g(0) = f(0 + 1) - f(0) = f(1) - f(0)$
$g(1) = f(1 + 1) - f(1) = f(2) - f(1)$

18.12b) 18.12b) TB als $a, b \in \mathbb{R}$ en $f(a) \leq y \leq f(b)$ of $f(b) \leq y \leq f(a)$ dan $\exists x \in [a, b]$ zdd $f(x) = y$.

Stel dat $a, b > 0$:
dan is het juist omdat $f(x)$ tussen a en b dan continu is.

Stel dat $a \leq 0, b > 0$.
... Als $a = 0, b = 0$ en een y wil tussen $f(a)$ en $f(b)$ dan krijg je $f(a) = y = f(b)$, dus ja, dan $\exists p \in [a, b]$ zdd $f(p) = y$, nl a en b voldoen al.

Als $a < 0, b = 0$ dan ...

Als $a < 0, b < 0$ dan is het juist net als bij geval 1.

4 Hints 3

18.10) $g(0) = f(0+1) - f(0) = f(1) - f(0)$
$g(1) = f(1+1) - f(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = -(f(1) - f(0))$

18.12b) Welke x je ook neemt, dan is $1/x$ altijd een eindig getal. Maar als die x naar 0 nadert, dan zijn de functiewaardes al een heleboel keren de getallen tussen 0 en 1 doorlopen.

5 Antwoorden

18.3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ moeten we oplossen.
$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 3$
$f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 1 = 5$, $f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 1 = 1$, $f(0) = 1$,
$f(5) = 5^3 - 6(5)^2 + 9(5) + 1 = 21$
Dus $\min(f) = 1$, maar $\max(f)$ bestaat niet, omdat het domein strikt tot 5 loopt. $f(5)$ is wel de kleinste bovengrens.

18.5a) Definieer $h(x) = f(x) - g(x)$. Dan is $h(a) \geq 0$ en $h(b) \leq 0$. Volgens de middelwaardestelling bestaat er nu een $x_0 \in [a, b]$ zdd $h(x_0) = 0$, ofwel $f(x_0) - g(x_0) = 0$ ofwel $f(x_0) = g(x_0)$.

18.5b) Ze nemen voor de g in opgave 18.5a de specifieke functie $g(x) = x$.

Verder $a = 0$, $b = 1$. En in opgave 18a heb je $f(a) \geq g(a)$ en $f(b) \leq g(b)$. In vb 1 is dat: $f(a) = f(0) \geq 0 = (y = x)(0) = (y = x)(a)$ en $f(b) = f(1) \leq 1 = (y = x)(1) = (y = x)(b)$.

18.6) Neem eerst aan dat het een gesloten interval is. Stel $f(x) = cos(x) - x$. Dan is $f(0) = cos(0) - 0 = 1$ en $f(\pi/2) = cos(\pi/2) - \pi/2 = -\pi/2$. Dus $f(\pi/2) \leq 0 \leq f(0)$. Dus $\exists x \in [0, \pi/2]$ zdd $0 = f(x)$ ofwel zdd $cos(x) - x = 0$ ofwel zdd $cos(x) = x$. Maar dat zijn niet 0 en $\pi/2$, want $cos(0) \neq 0$ en $cos(\pi/2) \neq \pi/2$. Dus $x = cos(x)$ voor een $x \in (0, \pi/2)$.

18.8) Als $f(a)f(b) < 0$ dan is $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$ of dan is $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$. Ofwel, dan is $f(a) < 0 < f(b)$ of $f(b) < 0 < f(a)$. Dus $\exists x \in [a, b]$ zdd $0 = f(x)$.

18.10) TB $\exists x, y \in [0, 2]$ zdd $|y - x| = 1$ en $f(x) = f(y)$ ofwel TB $\exists x \in [0, 1]$ zdd $f(x + 1) - f(x) = 0$.
$g(0) = f(0 + 1) - f(0) = f(1) - f(0)$
$g(1) = f(1 + 1) - f(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = -(f(1) - f(0))$
Nu kun je zeggen dat 0 altijd tussen $g(0)$ en $g(1)$ in ligt, dus dat $\exists x \in [0, 1]$ zdd $g(x) = 0$.

18.12a) Je kunt een rij x_n naar 0 kiezen zdd $\sin(1/x_n)$ steeds een waarde x_0 tussen 0 en 1 behoudt. Dan geldt wel $f(0) = 0$, maar $\lim(f(x_n)) = x_0$. En die x_0 is niet per se 0.

18.12b) TB als $a, b \in \mathbb{R}$ en $f(a) \leq y \leq f(b)$ of $f(b) \leq y \leq f(a)$ dan $\exists x \in [a, b]$ zdd $f(x) = y$.

Stel dat $a, b > 0$:
dan is het juist omdat $f(x)$ tussen a en b dan continu is.

Stel dat $a \leq 0, b > 0$.
Definieer c en d zdd $\sin(1/c) = -1$ en $\sin(1/d) = 1$ ofwel $c = 1/(2k\pi - \frac{1}{2}\pi)$ en $d = 1/(\frac{1}{2}\pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Omdat $c, d \to 0$ als $k \to \infty$, kun je een k vinden zdd c, d tussen 0 en b komen te liggen, dus zeker tussen a en b. Omdat $c, d > 0$, geldt de middelwaardestelling tussen c en d: als y tussen $f(c) = -1$ en $f(d) = 1$ ligt, dan $\exists p \in [c, d]$ zdd $f(p) = y$. Stel y ligt tussen $f(a)$ en $f(b)$. Dan zeker tussen $f(c) = -1$ en $f(d) = 1$, dus dan $\exists p \in [c, d] \subseteq [a, b]$, zdd $f(p) = y$.

Als $a = 0, b = 0$ en een y wil tussen $f(a)$ en $f(b)$ dan krijg je $f(a) = y = f(b)$, dus ja, dan $\exists p \in [a, b]$ zdd $f(p) = y$, nl a en b voldoen al.

Als $a < 0, b = 0$ dan kun je weer een c en d definiëren tussen a en b met

$f(c) = -1, f(d) = 1$ en gaat de rest op eenzelfde manier als bij het op 2 na laatste geval.

Als $a < 0, b < 0$ dan is het juist net als bij geval 1.