Hints en uitwerkingen huiswerk 2013 Analyse 1 H18

Rocco van Vreumingen

29 augustus 2014

Inhoudsopgave

1 Hints 1

19.2a) TB $3x + 11$ is uniform continu op $\mathbb{R}$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ zdd $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = ...$
Dan geeft $x, y \in \mathbb{R}$ dat
$|f(x) - f(y)| = |3x + 11 - (3y + 11)| = |3x - 3y|$ Er staat nu een x, y, een $+$ voor die x en een $-$ voor die y. De perfecte ingrediënten voor een δ.

19.2c) TB $1/x$ is uniform continu op $[1/2, \infty)$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ zdd $x, y \in [1/2, \infty) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = ...$
Dan geeft $x, y \in [1/2, \infty)$ dat
$|f(x) - f(y)| = |1/x - 1/y| = |\frac{y-x}{xy}| = |y - x|/|xy| < \delta/|xy|$.

19.3b) TB $\frac{5x}{2x-1}$ is uniform continu op $[1, \infty)$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ zdd $x, y \geq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = ...$

Dan geeft $x, y \geq 1$ en $|x - y| < \delta$ dat
$|f(x) - f(y)| = |\frac{5x}{2x-1} - \frac{5y}{2y-1}| = |\frac{5x(2y-1)-5y(2x-1)}{(2x-1)(2y-1)}| = |\frac{-5x+5y}{(2x-1)(2y-1)}|$.

19.1c) Hij lijkt op vb 7.

19.1d) Gebruik de definitie van uniforme continuïteit. Je weet nog niet of hij uniform continu of niet is, dus probeer eerst de definitie voor het geval van wel, en als je daar niet uitkomt doe dan de definitie voor het geval van niet, of andersom.

19.1e) Hij lijkt op de functie $1/x^2$, maar dan met exponent 3. Dus vb 3 en 6 zijn goed te gebruiken. En vb 6 is dan het best, want die is korter. Ook heb je daar niet het risico dat je een x moet gokken net zoals $x = \delta$ wordt gegokt in vb 3.

19.1f) Bekijk $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin(1/x^2) & \text{als } x \in (0, 1] \\ \tilde{f}(0) & \text{als } x = 0 \end{cases}$.
Als $\tilde{f}(0) = \lim(\tilde{f}(x_n))$ waarbij $x_n \to 0$, alleen dan is $\tilde{f}$ continu verlengd uit f. Maar daarvoor moet $\lim(\tilde{f}(x_n))$ wel gedefinieerd zijn als een reëel getal.

19.1g) Bekijk $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{als } x \in (0, 1] \\ \tilde{f}(0) & \text{als } x = 0 \end{cases}$.
Als $\tilde{f}(0) = \lim(\tilde{f}(x_n))$ waarbij $x_n \to 0$, alleen dan is $\tilde{f}$ continu verlengd uit f. Maar daarvoor moet $\lim(\tilde{f}(x_n))$ wel gedefinieerd zijn als een reëel getal.

Je weet dat $-1 \leq \sin(1/x_n) \leq 1$. Dus $-x_n^2 \leq x_n^2 \sin(1/x_n) \leq x_n^2$, waarbij $x_n \to 0$.

19.5c) Gebruik de informatie van vb 9. Dat kan handig zijn, omdat die functie daar lijkt op de functie van deze opgave.

19.5f) Gebruik stelling 19.6.

19.6b) Gebruik ook hier stelling 19.6.

19.9c) In een schets van de functie kun je al zien dat f' op een groot deel begrensd is en dus uniform continu. Stelling 19.6 zou dus goed van pas kunnen komen. Bereken de afgeleide van $x\sin(1/x)$. Bekijk daarna waar die afgeleide begrensd is.

19.10c) De afgeleide van $g'(x)$ waar $x \neq 0$, is $2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. Hopelijk is die ook begrensd op $(-\infty, 1]$ en $[1, \infty)$, want dan gaat de rest net als opgave 19.9c. Die $2x$ gooit nu roet in het eten, omdat $2x$ natuurlijk niet begrensd is op $\mathbb{R}$. Maar mssn kan de sinus die erachter staat dat wel tegenhouden.

2 Hints 2

19.1d) Je zou erop moeten uitkomen dat hij niet uniform continu is. Hij lijkt veel op vb 3.

19.3b) $|\frac{-5x+5y}{(2x-1)(2y-1)}| = \frac{5|y-x|}{|2x-1|*|2y-1|} < \frac{5\delta}{|2x-1|*|2y-1|}$.

19.1f) Je kunt een rij x_n naar 0 hebben, verkregen uit $\sin(1/x_n^2) = 1$. Maar die 1 kun je ook veranderen in een ander getal tussen -1 en 1, en dan verkrijg je alsnog een rij x_n naar 0.

19.1g) Gebruik de knijpstelling.

19.5c) Je wil een verlenging van de functie van deze opgave en wel in het domein $[0, \pi]$. Dus je wil 'm verlengen in $x = 0$. In vb 9 heb je al een verlenging van een functie. Die verlenging is bijna degene die je zoekt, maar je moet 'm nog vermenigvuldigen met $sin(x)$ en je moet nog het domein ervan aanpassen.

19.9c) Het is zo dat hij begrensd is op $(-\infty, k]$ en $[m, \infty)$ met $k < 0, m > 0$.

(Niet op $(-\infty, 0)$ en $(0, \infty)$). Met stelling 19.6 geldt dan al dat f daar uniform continu is.

19.10c) We moeten hebben $|f'(x)| \leq$ een bepaalde waarde. We berekenen als volgt:
$|2x\sin(1/x) - \cos(1/x)| \leq |2x| * |\sin(1/x)| + |-\cos(1/x)| = |2x| * |\sin(1/x)| + 1$.
Als er nou ipv $\sin(1/x)$ alleen $1/x$ stond, dan kreeg je het antwoord $|f'(x)| \leq |2x| * |1/x| + 1 = 3$. Beetje jammer dus dat die $1/x$ is vastgebakken in een sinus. Afschatten?

3 Hints 3

19.1d) TB f is niet uniform continu op $\mathbb{R}$ ofwel TB $\exists \epsilon > 0$ zdd $\forall \delta > 0$ $\exists x, y \in \mathbb{R}$ zdd $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Kies $\epsilon = 1$, stel $\delta > 0$ en kies $x = ...$ en $y = x + \frac{1}{2}\delta$. De keuze voor x laten we nog even, net zoals in vb 3 wordt gedaan.
Nu geeft $|x - y| < \delta$ dat $|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| =$

19.9c) Je weet ook dat f op gesloten intervallen, is uniform continu (stelling 19.2). Het moet dus wel heel gek lopen als f toch niet uniform continu is op $\mathbb{R}$.

19.10c) Ja, afschatten. Er geldt nl dat $\forall p \in \mathbb{R}$ $|\sin(p)| \leq |p|$.

4 Hints 4

19.1d) Omdat de grafiek $y = x^3$ stijgend is en $y > x$, geldt $|x^3 - y^3| = y^3 - x^3$.
En dat gaat verder als volgt: $= (x + \frac{1}{2}\delta)^3 - y^3 = (x + \frac{1}{2}\delta)(x^2 + x\delta + \frac{1}{4}\delta^2) - x^3 = [x^3 + \delta x^2 + \frac{1}{4}x\delta^2 + \frac{1}{2}\delta x^2 + \frac{1}{2}\delta^2 x + \frac{1}{8}\delta^3] - x^3$

19.9c) Gebruik de definitie van uniforme continuïteit. Nu je hebt dat f zowel uniform continu is op $(-infty, k]$ en $[m, \infty)$ en gesloten intervallen, moet je een gesloten interval kiezen in combinatie met dat je een k, m en een $\delta > 0$ kiest. Als je dat goed doet, dan zullen zowel x als y in precies 1 van die 3 genoemde intervallen zitten.

5 Hints 5

19.1d) En nu kun je alle x^3 wegstrepen omdat $x^3 - x^3 = 0$. Verder zijn een heleboel termen niet-negatief. Dat is mooi, want je wil eindigen met "≥ 1".

6 Hints 6

19.1d) Dus het zooitje dat je nu hebt $\geq \frac{3}{4}\delta^2 x$. Je kunt nu net zoals in vb 3 gwn een x uitproberen, maar je kunt nu ook beredeneren welke x goed gekozen is.

7 Hints 7

19.1d) Als $\frac{3}{4}\delta^2 x = 1$ dan ben je klaar. Je hoeft nu alleen nog maar een goede x te kiezen.

8 Antwoorden

19.1a) f is continu op een gesloten interval, dus ook uniform continu (stelling 19.2).

19.1b) idem als (a)

19.1c) Definieer $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0 \\ f(x) & \text{als } x \in (0,1) \\ 1 & \text{als } x = 1 \end{cases}$. Deze functie is continu op een gesloten interval en is een verlenging van f. Dus f is uniform continu (stelling 19.5).

19.1d) TB f is niet uniform continu op $\mathbb{R}$ ofwel TB $\exists \epsilon > 0$ zdd $\forall \delta > 0$ $\exists x, y \in \mathbb{R}$ zdd $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Kies $\epsilon = 1$, stel $\delta > 0$ en kies $x = \frac{4}{3\delta^2}$ en $y = x + \frac{1}{2}\delta$.
Dan geeft $|x - y| < \delta$ dat
$|f(x)-f(y)| = |x^3-y^3| = y^3-x^3$ (de grafiek x^3 is stijgend) $= (x+\frac{1}{2}\delta)^3-x^3 = (x + \frac{1}{2}\delta)(x^2 + x\delta + \frac{1}{4}\delta^2) - x^3 = [x^3 + \delta x^2 + \frac{1}{4}x\delta^2 + \frac{1}{2}\delta x^2 + \frac{1}{2}\delta^2 x + \frac{1}{8}\delta^3] - x^3 \geq \frac{3}{4}\delta^2 x = 1$

19.1e) Neem $s_n = 1/n$. Die rij convergeert, dus is een Cauchy rij in $(0,1]$. Maar $f(s_n) = f(1/n) = n^3$ en die convergeert niet, dus is niet Cauchy. Dus is f niet uniform continu op $(0,1]$.

19.1f) Neem $\sin(1/x_n^2) = 1$. Dan voldoet $x_n = 1/\sqrt{\frac{1}{2}\pi + 2n\pi}$ en die convergeert naar 0. Neem $\sin(1/x_n^2) = 0$. Dan voldoet $x_n = 1/\sqrt{n\pi}$ en die convergeert ook naar 0. Bekijk $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin(1/x^2) & \text{als } x \in (0,1] \\ \tilde{f}(0) & \text{als } x = 0 \end{cases}$. Als $\tilde{f}(0) = \lim(\tilde{f}(x_n))$ alleen dan is $\tilde{f}$ continu verlengd uit f. Maar we hebben net een rij x_n gezien waarvoor $\tilde{f}(x_n)$ naar 0 ging en een rij x_n waarvoor $\tilde{f}(x_n)$ naar 1 ging. Dus er bestaat geen $\lim(\tilde{f}(x_n))$. Dus f is niet uniform continu op $(0,1]$ (stelling 19.5).

19.1g) Stel $x_n \to 0$. Bekijk de ongelijkheid $-x_n^2 \leq \lim(x_n^2 \sin(1/x_n)) \leq x_n^2$. Nu is $\lim(-x_n) = 0 = \lim(x_n)$. Dus $\lim(x_n^2 \sin(1/x_n)) = 0$ (knijpstelling). Bekijk de verlenging $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{als } x \in (0,1] \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$. Nu geldt $\tilde{f}(0) = 0 = \lim \tilde{f}(x_n)$. Dus f is uniform continu op $(0,1]$ (stelling 19.5).

19.2a) TB $3x + 11$ is uniform continu op $\mathbb{R}$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ zdd $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$
Dan geeft $x, y \in \mathbb{R}$ dat
$|f(x) - f(y)| = |3x + 11 - (3y + 11)| = |3x - 3y| = 3|x - y| < 3\delta = \epsilon$

19.2c) TB $1/x$ is uniform continu op $[1/2, \infty)$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ zdd $x, y \in [1/2, \infty) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = (1/4)\epsilon$
Dan geeft $x, y \in [1/2, \infty)$ dat
$|f(x) - f(y)| = |1/x - 1/y| = |\frac{y-x}{xy}| = |y - x|/|xy| < \delta/|xy| \leq \delta/\frac{1}{4} = \epsilon$

19.3b) TB $\frac{5x}{2x-1}$ is uniform continu op $[1, \infty)$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ zdd $x, y \geq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$

Dan geeft $x, y \geq 1$ en $|x - y| < \delta$ dat
$|f(x) - f(y)| = |\frac{5x}{2x-1} - \frac{5y}{2y-1}| = |\frac{5x(2y-1)-5y(2x-1)}{(2x-1)(2y-1)}| = |\frac{-5x+5y}{(2x-1)(2y-1)}| = \frac{5|y-x|}{|2x-1|*|2y-1|} < \frac{5\delta}{(2x-1)(2y-1)} \leq \frac{5\delta}{2(1)-1)(2(1)-1)} = 5\delta = \epsilon$

19.5c) Uit vb 9 volgt dat $\tilde{f} = \begin{cases} (1/x)\sin(x) & \text{als } x \in (0,\pi] \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$ continu is.

$\sin(x)\tilde{f} = \sin(x) * \begin{cases} (1/x)\sin(x) & \text{als } x \in (0,\pi] \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} (1/x)\sin(x)\sin(x) & \text{als } x \in (0,\pi] \\ sin(x) & \text{als } x = 0 \end{cases} =$

$\begin{cases} (1/x)\sin^2(x) & \text{als } x \in (0,\pi] \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$. Dit is een verlenging van $(1/x)\sin^2(x)$ in $x = 0$. Deze is continu, omdat $sin(x)$ dat is en omdat de functie uit vb 9 dat is (stelling 17.4ii). Dus is $\frac{1}{x}\sin^2(x)$ uniform continu op $(0,\pi]$ (stelling 19.5).

19.5e) Op het interval $(3,4)$ is die van boven onbegrensd, dus niet uniform continu (opgave 19.4a). Dus dan zeker niet uniform continu op $(3,\infty)$.

19.5f) f is continu op het open interval $(4,\infty)$. Er geldt verder $f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2}$. Die is begrensd op dit open interval, dus f zelf is uniform continu (stelling 19.6).

19.6a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en die is van beneden onbegrensd. Maar $\sqrt{x}$ op $[0,1]$ is een continue verlenging op $x = 0$ van f op $(0,1]$. Dus f is uniform continu op $(0,1]$. Dus stelling 19.6 is niet omkeerbaar.

19.6b) f is continu op $[1,\infty)$. We verwijderen nu het eindpunt 1 en krijgen het open interval $(1,\infty)$. Omdat $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ begrensd is op dit interval, is f zelf uniform continu op $[1,\infty)$ (stelling 19.6).

19.9a) Als $x \to 0$ dan kan een sinus alleen, die maar wisselt tussen -1 en 1, het gevolg dat de hele functie naar 0 gaat niet tegenhouden.

19.9b) Stel dat $S \subseteq [a,b]$ met $a \leq b$. We weten dat f continu is op $\mathbb{R}$, dus ook op $[a,b]$. Dus f is uniform continu op $[a,b]$ (stelling 19.2). Dan is die zeker uniform continu op S.

19.9c) Voor $x \neq 0$ is $f'(x) = \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x}$.
Die afgeleide is begrensd op $(-\infty,-1]$ en $[1,\infty)$, dus f is uniform continu op $(-\infty,-1]$ en $[1,\infty)$ (stelling 19.6)
Er geldt ook dat f uniform continu is op $[-2,2]$ (stelling 19.2).
Stel $\epsilon > 0$ en kies $\delta = 1$. Dan geeft $x, y \in \mathbb{R}$ en $|x - y| < \delta$ dat:
$x, y \in [1,\infty)$ of $\in [-2,2]$ of $\in [1,\infty)$. Omdat f uniform continu is op al die 3 intervallen, geeft het dat $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Dus op $\mathbb{R}$ is f ook uniform continu.

19.10a) idem als opgave 19.9a

19.10b) idem als opgave 19.9b

19.10c) Voor $x \neq 0$ is $g'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. Die afgeleide is begrensd op $(-\infty, -1]$ en $[1, \infty)$, want daar geldt:
$|g'(x)| = |2x\sin(1/x) - \cos(1/x)| \leq |2x| * |\sin(1/x)| + |-\cos(1/x)| \leq |2x| * |1/x| + 1 = 3$.
Op dezelfde manier als bij opgave 19.9c is ook deze functie uniform continu op $\mathbb{R}$.