Hints en uitwerkingen huiswerk 2013 Analyse 1 H4

Rocco van Vreumingen

22 augustus 2014

Inhoudsopgave

1 Hints 1

4.9.1) $s \leq \sup(S)\ \forall s \in S$. Je moet echter toewerken naar de vorm $sup(-S)$.
4.9.2) Je moet vanuit "$t \leq s\ \forall s \in S$ï.i.g. naar een uitdrukking met een suprenum toewerken.

4.14a) Om TB dat $\sup(A+B) - b$ voor alle $b \in B$ een bovengrens is voor A, kun je ipv te schrijven "$\sup(A) \leq \sup(A+B) - b\ \forall b \in B$"schrijven "$a \leq \sup(A+B) - b\ \forall a \in A, b \in B$."En dat klopt, want dat is hetzelfde als te schrijven dat $a + b \leq \sup(A+B)\ \forall a \in A, b \in B$.

2 Hints 2

4.9.2) $t \leq s \Rightarrow -t \geq -s \Rightarrow -t \geq \sup(-S)$

4.14a) Zoals de hint in de opgave verder zegt, moet je nu een bovengrens zien te vinden voor B, dus iets met "$b \leq ...\forall b \in B$". In de ongelijkheid nu, heb je al een b met de uitdrukking "$\forall b$" erachter.

3 Hints 3

4.14a) $b \leq \sup(A+B) - \sup(A)\ \forall b \in B$.

4 Antwoorden

4.3a) 1
4.3b) 1
4.3h) ∞
4.3i) 1
4.3k) ∞
4.3l) 2
4.3o) 0
4.3s) 1/2
4.3u) ∞

4.4a) 0
4.4b) 0

4.4h) 2
4.4i) 0
4.4k) $1 + \frac{(-1)^1}{1} = 0$ (bij hogere n gaat bij aftrek ervan, altijd minder dan 1 van af.)
4.4l) $-\infty$
4.4o) $-\infty$
4.4s) 0
4.4u) 0

4.5) $\sup(S) \geq s \ \forall s \in S$. En $\sup(S)$ is ook nog eens een element van S, dus is het het grootste element van S, dus $\sup(S) = \max(S)$.

4.6a) Stel dat $\inf(S) > \sup(S)$. Pak een willekeurige $s \in S$. Dan geldt $s \geq \inf(S) > \sup(S) \geq s$. Maar dan is $s > s$ en dat is onzin.

4.6b) Dan bestaat S uit precies 1 reëel getal.

4.9) (1): $-s \leq \sup(-S) \ \forall s \in S$ ofwel $s \geq -\sup(-S)$.
(2): Als $t \leq s \ \forall s \in S$ dan is $-t \geq -s$, dus $-t \geq \sup(-S)$, dus $t \leq \sup(-S)$.

4.12) Stel $r + \sqrt{2}$ is rationaal. Dan is $r + \sqrt{2} = m/n$ met $m, n \in \mathbb{N}$. Dan is $\sqrt{2} = m/n - r$ en dat is ook rationaal. In hoofdstuk 2 staat dat $\sqrt{2}$ juist niet rationaal is. Dus de veronderstelling dat $r + \sqrt{2}$ rationaal was, leidde tot onzin. Ofwel, $r + \sqrt{2} \in \mathbb{I}$.
Neem nu $x = r + \sqrt{2}$. Nu hoeven we alleen nog te laten zien dat er een r is zdd $a < r + \sqrt{2} < b$ ofwel $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$ (want x is uitgedrukt in r). Omdat $r \in \mathbb{Q}$ is die r er (dichtheid van $\mathbb{Q}$).

4.14a) 1) TB $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$.
$\forall a \in A, b \in B : a + b \leq \sup(A + B) \Rightarrow a \leq \sup(A + B) - b$
$\Rightarrow \sup(A) \leq \sup(A + B) - b \Rightarrow b \leq \sup(A + B) - \sup(A)$
$\Rightarrow \sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A) \Rightarrow \sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$
2) TB $\sup(A+B) \leq \sup(A)+\sup(B)$ ofwel TB $a+b \leq \sup(A)+\sup(B) \forall a \in A, b \in B$ maar dat klopt al.
Vanwege de juistheid van deze 2 stellingen is de hele opgavestelling ook bewezen.

4.14b) 1) TB $\inf(A + B) \leq \inf(A) + \inf(B)$
$a + b \geq \inf(A + B) \ \forall a \in A, b \in B \Rightarrow a \geq \inf(A + B) - b \Rightarrow \inf(A) \geq \inf(A+B) - b \Rightarrow b \geq \inf(A+B) - \inf(A) \Rightarrow \inf(B) \geq \inf(A+B) - \inf(A) \Rightarrow \inf(A + B) \leq \inf(A) + \inf(B)$.
2) TB $\inf(A + B) \geq \inf(A) + \inf(B)$ ofwel TB $a + b \geq \inf(A) + \inf(B)$ $\forall a \in A, b \in B$, klopt.

4.16) TB $\sup(r \in \mathbb{Q} : r < a) = a$
Omdat $a \geq r \ \forall r$, geldt $\sup(r \in \mathbb{Q} : r < a) \leq a$.
Stel $\sup(r \in \mathbb{Q} : r < a) = b < a$.
$\exists q \in \mathbb{Q}$ zdd $b < q < a$ (dichtheid $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$).
q zit in de verzameling waarover we de sup nemen, maar $q > b$. Dus $b \neq$ sup.
Tegenspraak.