Hints en uitwerkingen huiswerk 2013 Analyse 1 H8

Rocco van Vreumingen

22 augustus 2014

Inhoudsopgave

1 Hints 1

8.1a) Met $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$ zeg je eigenlijk
$\forall \epsilon > 0 \; \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \epsilon$

8.1b) $|n^{1/3}| > 1/\epsilon \Rightarrow |\frac{1}{n^{1/3}} - 0| < \epsilon$

8.1c) $|\frac{2n-1}{3n+2} - 2/3| = |\frac{2n-1}{3n+2} - \frac{\frac{2}{3}(3n+2)}{3n+2}|$

8.1d) Hij lijkt op voorbeeld 3 van de theorie bij hoofdstuk 8.

8.2e) De sinus kun je afschatten.

8.3) TB $\lim \sqrt{s_n} = 0$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0 \; \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\sqrt{s_n} - 0| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$
Omdat $\lim s_n = 0$ geldt $\exists N$ zdd $n > N$ geeft dat $|s_n - 0| < \epsilon$ ofwel $s_n < \epsilon$

8.4) $|s_n t_n| = |s_n| * |t_n|$

8.5a) Je wil uitkomen op een uitdrukking met "$|s_n - s| < \epsilon$". Je kunt dit herschrijven. Hoe kun je dat het beste doen, bedenkend dat $a_n \leq s_n \leq b_n$ waar ook een s_n in voorkomt, juist 2 kleiner gelijktekens heeft?

8.5b) Ga voor de verandering nu niets met ϵ en N doen, maar gebruik de knijpstelling, die je hebt bewezen in (a).

8.6b) Er staat alleen dat je moet observeren, dus je hoeft het niet te bewijzen en alleen maar aannemelijk te maken.

8.7a) Hij lijkt op voorbeeld 4.

8.7b) Deze lijkt nog meer op voorbeeld 4.

8.7c) Bij voorbeeld 4 gebruiken ze heel veel enen, in het bijzonder bij $|1 - a|$ en $|-1 - a|$. Dat heb je ook al bij 8.7a gezien. Bij 8.7c kun je niet weer die enen gebruiken, omdat er geen n is waarvoor $\sin(\frac{n\pi}{3}) = 1$ of -1. Maar er zijn genoeg andere reële getallen.

8.8a) Merkwaardig product toepassen.

8.8b) Hij lijkt enigszins op voorbeeld 2. Je moet dus geen driehoeksongelijkheid gebruiken, mocht je dat gewend zijn vanwege opgave 8.7. 8.9a) Gebruik contrapositief (modus tollens)

2 Hints 2

8.1a) Begin met: "stel $\epsilon > 0$. Kies $N = ...$". Die puntjes ga je later nog invullen, maar je weet nog niet welke N handig is om te kiezen voor je bewijs. Schrijf daarna: "Dan geeft $n > N$ dat". Sla daarna een hoop witregels over. Die ga je later namelijk nog opvullen. En eindig met "$\Rightarrow |\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \epsilon$". Ga dan van rechts naar links en van beneden naar boven een redenering schrijven vanaf "$\Rightarrow |\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \epsilon$".

8.1c) $\frac{7}{9n+6} < \frac{7}{9n}$

8.3) $n > N$ geeft $|\sqrt{s_n} - 0| = |\sqrt{s_n}| = \sqrt{s_n}$

8.5a) De herschrijving is: $s - \epsilon < s_n < s + \epsilon$. En die lijkt al iets meer op $a_n \leq s_n \leq b_n$, alleen dan met 2 ongelijktekens ipv 2 kleiner gelijktekens.

8.7a) Voor sommige n krijg je dat $\cos(\frac{n\pi}{3}) = 1$ en voor sommige n krijg je $\cos(\frac{n\pi}{3}) = -1$

8.7b) Zoals in (a) je onderscheid moest maken tussen $n = 6k$ en $n = 6k + 3$, zo moet je hier onderscheid maken tussen even en oneven n.

8.7c) Stel a is de limiet en b is een constant getal dat volgens Hint 1 geen 1 kon zijn. Je moet toewerken naar zoiets als $b + b > |b - a| + |-b - a| [= |b - a| + |-(b + a)|] = |b - a| + |b + a| \geq |2b| = 2b$. De eerste ongelijkheid omdat je $\epsilon = b$ kiest.

8.8a) $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n)}$

8.9a) Kies Ã©Ã©n handige *epsilon* uit.

3 Hints 3

8.1a) Probeer bij het van achter naar voren uiteindelijk uit te komen op '$n >$' en een uitdrukking in ϵ erachter. Daarachter kun je weer "$= N$"schrijven. Dus die uitdrukking in "ϵ"wordt gelijk aan je N. Dus de puntjes achter die N kun je nu eindelijk invullen. Je hebt nu een geschikte N gevonden.

8.3) "$\sqrt{s_n} * \sqrt{s_n}$"hoef je niet te gebruiken. Het bewijs kan anders.

8.5a) Als je hebt $-\epsilon + s < a_n \leq s_n \leq b_n < s + \epsilon$ dan ben je klaar.

8.7c) Er moeten twee ennen zijn waarvoor zowel b als $-b$ bestaat, want ook $-b$ heb je nodig in de ongelijkheid.

8.9a) Als $\lim s_n < a$ dan hoeft het verschil tussen die limiet en a niet per se groot te zijn, als die maar > 0 is.

4 Hints 4

8.3) $\sqrt{s_n} < \sqrt{\epsilon}$

5 Hints 5

8.3) Je komt uit op $\sqrt{\epsilon}$, maar je wil op ϵ uitkomen, dus je moet nog wat aanpassen aan de ϵ bij $|s_n - 0| < \epsilon$

6 Antwoorden

8.1a) TB $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0 \; \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = 1/\epsilon$
Dan geeft $n > N$ dat
$n > 1/\epsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow |\frac{(-1)^n}{n}| < \epsilon \Rightarrow |\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \epsilon$

8.1b) TB $\lim \frac{1}{n^{1/3}} = 0$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0 \; \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{1}{n^{1/3}} - 0| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = 1/\epsilon^3$
Dan geeft $n > N$ dat
$n > 1/\epsilon^3 \Rightarrow |n^{1/3}| > 1/\epsilon \Rightarrow |\frac{1}{n^{1/3}} - 0| < \epsilon$

8.1c) TB $\lim \frac{2n-1}{3n+2} = 2/3$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0 \; \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{2n-1}{3n+2} - 3/2| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = 7/(9\epsilon)$
Dan geeft $n > N$ dat
$n > 7/(9\epsilon) \Rightarrow |\frac{2n-1}{3n+2} - \frac{\frac{2}{3}(3n+2)}{3n+2}| = |\frac{-7/3}{3n+2}| = \frac{7}{3(3n+2)} = \frac{7}{9n+6} < \frac{7}{9n} < \epsilon$

8.1d) TB $\lim \frac{n+6}{n^2-6} = 0$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0 \; \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{n+6}{n^2-6} - 0| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = \max\{14/\epsilon, 3\}$
Dan geeft $n > N$ het volgende, waarbij de derde gelijkheid vanaf links alleen geldt voor $n > 2$ en de eerste ongelijkheid vanaf links geldt alleen voor $n > 3$. In totaal geldt het volgende dus voor $n > 3$.
$|\frac{n+6}{n^2-6} - 0| = |\frac{n+6}{n^2-6}| = \frac{n+6}{|n^2-6|} = \frac{n+6}{n^2-6} < \frac{n+6}{\frac{1}{2}n^2} \leq \frac{7n}{\frac{1}{2}n^2} = 14/n < \epsilon$

8.2a) TB $\lim \frac{n}{n^2+1} = 0$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0 \; \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{n}{n^2+1} - 0| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = 1/\epsilon$

Dan geeft $n > N$ dat
$|\frac{n}{n^2+1} - 0| = \frac{n}{n^2+1} < n/n^2 = 1/n < \epsilon$

8.2b)TB $\lim \frac{7n-19}{3n+7} = 7/3$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{7n-19}{3n+7} - 7/3| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = (106/9)\epsilon$
Dan geeft $n > N$ dat
$|\frac{7n-19}{3n+7} - 7/3| < |\frac{7n-19}{3n+7} - \frac{(7/3)(3n+7)}{3n+7}| = |\frac{-106/3}{3n+7}| = \frac{106/3}{3n+7} \leq \frac{106/3}{3n} = \frac{106}{9n} < \epsilon.$

8.2c) TB $\lim \frac{4n+3}{7n-5} = 4/7$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{4n+3}{7n-5} - 4/7| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = (41/7)\epsilon$.
Dan geeft $n > N$ dat
$|\frac{4n+3}{7n-5} - 4/7| = |\frac{41/7}{7n-5}| = \frac{41/7}{7n-5} \leq \frac{41/7}{n} < \epsilon$

8.2d) TB $\lim \frac{2n+4}{5n+2} = 2/5$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{2n+4}{5n+2} - 2/5| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = \frac{16}{25\epsilon}$
Dan geeft $n > N$ dat
$|\frac{2n+4}{5n+2} - 2/5| = |\frac{16/5}{5n+2}| = \frac{16}{5(5n+2)} = \frac{16}{25n+10} < \frac{16}{25n} < \epsilon$

8.2e)TB $\lim \frac{1}{n}\sin(n) = 0$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |(1/n)\sin(n) - 0| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = 1/\epsilon$.
Dan geeft $n > N$ dat $|\frac{1}{n}\sin(n) - 0| = \frac{1}{n}|\sin(n)| \leq \frac{1}{n} * 1 = 1/n < \epsilon$

8.3) TB $\lim \sqrt{s_n} = 0$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow$
$|\sqrt{s_n} - 0| < \epsilon$
Stel $\epsilon > 0$
Omdat $\lim s_n = 0$ geldt $\exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |s_n - 0| < \epsilon^2$ ofwel $s_n < \epsilon^2$
$n > N$ geeft
$|\sqrt{s_n} - 0| = |\sqrt{s_n}| = \sqrt{s_n} < \epsilon$

8.4) TB $\lim s_n t_n = 0$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |s_n t_n - 0| < \epsilon$
Omdat $\lim s_n = 0$ geldt $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |s_n - 0| < \epsilon/M$ ofwel $|s_n| < \epsilon/M$. En $|t_n| \leq M$. Dus je krijgt:
$|s_n t_n - 0| = |s_n| * |t_n| < \epsilon/M * M = \epsilon$

8.5a) TB $\lim s_n = s$ ofwel TB $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |s_n - s| < \epsilon$.
We weten al dat $a_n \leq s_n \leq b_n$. Omdat $\lim a_n = s$ en $\lim b_n = s$ geldt:
$\forall \epsilon > 0\ \exists N_1$ zdd $n > N_1 \Rightarrow |a_n - s| < \epsilon$ dwz $-\epsilon + s < a_n [< \epsilon + s]$ en
$\forall \epsilon > 0\ \exists N_2$ zdd $n > N_1 \Rightarrow |b_n - s| < \epsilon$ dwz $[-\epsilon + s <] b_n < \epsilon + s$ dus
stel $\epsilon > 0$ en kies $N = \max(N_1, N_2)$. Dan geeft $n > N$ dat
$-\epsilon + s < a_n$ en $b_n < \epsilon + s$. Dan geldt $-\epsilon + s < a_n \leq s_n \leq b_n < \epsilon + s$ ofwel
$-\epsilon + s < s_n < \epsilon + s$ ofwel $|s_n - s| < \epsilon$

8.5b) $|s_n| \leq t_n$ ofwel $t_n \leq s_n \leq t_n$. Omdat $\lim t_n = \lim t_n = 0$ is via de knijpstelling $\lim s_n = 0$.

8.6a) Stel dat $\lim s_n = 0$. Nu geldt: $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow ||s_n| - 0| = |s_n| = |s_n - 0| < \epsilon$ dus ook $\lim |s_n| = 0$.
Stel dat $\lim |s_n| = 0$. Nu geldt: $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |s_n - 0| = |s_n| = ||s_n| - 0| < \epsilon$. Dus ook $\lim s_n = 0$.

8.6b) $\lim |s_n| = \lim 1 = 1$ en $\lim s_n$ bestaat niet omdat s_n steeds 1 en -1 is. Je kunt dus zeggen dat hij voor een hele grote n naar 1 gaat, maar voor hetzelfde geld gaat hij naar -1. En er mag maar 1 limiet zijn, je kunt ze niet allebei hebben.

8.7a) TB $\cos(\frac{n\pi}{3})$ convergeert niet.
Stel hij convergeert wel.
Dan kun je schrijven $\lim \cos(\frac{n\pi}{3}) = a$, $a \in \mathbb{R}$ ofwel $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\cos(\frac{n\pi}{3}) - a| < \epsilon$.
$\forall \epsilon$, dus ook voor $\epsilon = 1$, dus dan kun je schrijven $\exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\cos(\frac{n\pi}{3}) - a| < 1$. Er staat dat alle n die groter zijn dan N dat impliceren, dus ook degenen die groter zijn dan N én te schrijven zijn als $6k$ en $6k + 3$ met $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (zulke n uitgedrukt in k bestaan ongeacht welke N je kiest). Als we die $6k$ en die $6k+3$ nou invullen in de cosinus, dan krijgen we $|1-a| < 1$ en $|-1-a| < 1$. Daaruit is af te leiden: $|1-a|+|-1-a| < 1+1 = 2$
Met de driehoeksongelijkheid weten we dat $|1 - a| + | - 1 - a| = |1 - a| + | - (1 + a)| = |1 - a| + |1 + a| \geq |1 - a + 1 + a| = 2$. Combineren geeft: $2 > |1-a|+|-1-a| \geq 2$ dus $2 > 2$. Dat is onzin, dus er is geen convergeren.

8.7b) TB $(-1)^n * n$ convergeert niet.
Stel hij convergeert wel.
Dan kun je schrijven $\lim(-1)^n * n = a$ ofwel $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |(-1)^n * n - a| < \epsilon$. Als je een even $n = m$ kiest en een buurman $n = m+1$ en $\epsilon = 1/2$ dan krijg je dit:
$1 = 1/2 + 1/2 > |(-1)^m * m - a| + |(-1)^{m+1} * (m + 1) - a| = |m - a| + | - (m + 1) - a| = |m - a| + | - ((m + 1) + a)| = |m - a| + |m + 1 + a| \geq |m - a + m + 1 + a| = |2m + 1| \geq 1$ dus $1 > 1$. Dat is onzin, dus er is geen convergeren.

8.7c) TB $\sin(\frac{n\pi}{3})$ convergeert niet.
Stel hij convergeert wel.
Dan kun je schrijven $\lim \sin(\frac{n\pi}{3}) = a$ ofwel $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\sin(\frac{n\pi}{3}) - a| < \epsilon$.
Als je $n = 6k + 1$ en $n = 6k - 1$ kiest die allebei groter zijn dan N en daarnaast kiest $\epsilon = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan krijg je dit:

$\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} > |\sin(\frac{6k+1\pi}{3}) - a| + |\sin(\frac{6k-1\pi}{3}) - a| = |\sqrt{3}/2 - a| + | - \sqrt{3}/2 - a| = |\sqrt{3}/2 - a| + |\sqrt{3}/2 + a| \geq |\sqrt{3}/2 - a + \sqrt{3}/2 + a| = \sqrt{3}$. Maar dan is $\sqrt{3} > \sqrt{3}$ en dat is onzin. Dus er is geen convergeren.

8.8a) TB $\lim\sqrt{n^2+1} - n = 0$ ofwel TB $\forall\epsilon > 0 \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow$
$|\sqrt{n^2+1} - n - 0| < \epsilon$.
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = 1/\epsilon$.
Dan geeft $n > N$ dat
$|\sqrt{n^2+1} - n| = |\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n)}| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq 1/n < \epsilon$

8.8b) TB $\lim\sqrt{n^2+n} - n = 1/2$ ofwel TB $\forall\epsilon > 0 \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow$
$|\sqrt{n^2+n} - n - 1/2| < \epsilon$.
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = 1/(16\epsilon^2 - 1)$.
Dan geeft $n > N$ dat
$|\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)} - 1/2| = |\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} - 1/2| = |\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} - \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}| =$
$|\frac{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n}+n}| = \frac{|\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n^2+n}|}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

Omdat als je de absoluutstokken wegdenkt de teller negatief is, geldt verder:

$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} - \frac{1}{2}n}{\sqrt{n^2+n}+n} \leq \frac{\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} - \frac{1}{2}n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} - \frac{1}{2}n}{2n} \leq \frac{\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n}}{2n} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} - \frac{1}{2}n}{2n} \leq \frac{\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n}}{2\sqrt{n^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{1+1/n} < \epsilon$

8.8c) TB $\lim\sqrt{4n^2+n} - 2n = 1/4$ ofwel TB $\forall\epsilon > 0 \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow$
$|\sqrt{4n^2+n} - 2n - 1/4| < \epsilon$.
Stel $\epsilon > 0$ en kies $N = 1/(16^2\epsilon^2 - 4)$
Dan geeft $n > N$ dat

$|\sqrt{4n^2+n} - 2n - 1/4| = |\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} - \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{4n^2+n}+2n)}{\sqrt{4n^2+n}+2n}| = |\frac{n - \frac{1}{4}\sqrt{4n^2+n} - \frac{1}{2}n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}| =$

$\frac{\frac{1}{4}\sqrt{4n^2+n} - \frac{1}{2}n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} \leq \frac{\frac{1}{4}\sqrt{4n^2+n}}{4n} = \frac{\sqrt{4n^2+n}}{16n} = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{4n^2+n}{n^2}} = \frac{1}{16}\sqrt{4+1/n} < \epsilon$

8.9a) Stel dat $\lim s_n = s < a$ Dan geldt $\forall\epsilon > 0 \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow$
$|s_n - s| < \epsilon$, dus $\exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |s_n - s| < a - s \Rightarrow -(a-s) < s_n - s < a - s \Rightarrow s_n < a$. Dus voor sommige n is $s_n < a$. Nu is het bewijs contrapositief geleverd.

8.9b) Stel dat $\lim s_n = s > b$. Dan geldt $\exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |s_n - s| < s - b \Rightarrow -(s-b) < s_n - s < s - b \Rightarrow b < s_n$. Dus voor sommige n is $s_n < a$. Nu is het bewijs contrapositief geleverd.

8.9c) s_n hoort bij $[a, b]$, dus $a \leq s_n \leq b$. Omdat $s_n \geq a$, is $\lim s_n \geq a$.

Omdat $s_n \leq b$, is lim$s_n \leq b$. Dus $a \leq$lim$s_n \leq b$. Dus lims_n hoort bij $[a, b]$.

8.10) lim $s_n = s[> a]$ dus $\exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |s_n - s| < s - a \Rightarrow -(s - a) < s_n - s < s - a \Rightarrow a < s_n$.