Hints en uitwerkingen huiswerk 2013 Analyse 1 H9

Rocco van Vreumingen

29 augustus 2014

Inhoudsopgave

1 Startopmerkingen **3**

2 Hints 1 **3**

3 Hints 2 **4**

4 Hints 3 **4**

5 Hints 4 **5**

6 Hints 5 **5**

7 Hints 6 **6**

8 Hints 7 **6**

9 Hints 8 **7**

10 Antwoorden **7**

1 Opmerkingen

Een getal zelf is nooit ∞ of $-\infty$. Een limiet of een infimum kan dat wel zijn.

Zie voor de definitie van "inf"en "bounded"hoofdstuk 4.

2 Hints 1

9.1b) Deel teller en noemer door n

9.1c) Als je in de teller en noemer zou delen door n^k met $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan heb je nog steeds last van n met een constant getal ervoor, net zoals je dat bij (b) had.

9.3) $\lim(a_n^3) = \lim(a_n * a_n * a_n)$

9.4b) Hij convergeert, dus je mag aannemen dat $\lim(s_n) \in \mathbb{R}$.

9.6b) Bewijzen hoeft niet, er staan alleen uitleggen. Dus kijk of aan de regels in de 2e alinea op blz. 51 is voldaan. Zo ja, dan is het antwoord 'ja'.

9.9a) Het is hoogste tijd om definitie 9.8 te gebruiken.

9.9c) Je kunt uit (a) en (b) concluderen dat je nu mag aannemen dat $\lim(s_n)$ en $\lim(t_n)$ reëel zijn (ofwel dat s_n en t_n convergeren). Hoe luidt die conclusie?

9.10c) Bij (9.10c) en dan het gedeelte van de tekst voor de komma, die lijkt erg op (9.10a) en daarvan het gedeelte voor de komma. Daarvan kun je handig gebruik maken.

9.11a) Je moet iets hebben zoals "$s_n + t_n \geq s_n + \inf > M$ dus $s_n > M - \inf$". Maar dan moet je wel zeker weten dat inf reëel is. Hoe weet je dat dat idd zo is? (Opmerking: M is al reëel, want M is gwn een getal.)

9.11b) Bekijk stelling 9.1

9.12a) Schrijf eerst de definitie op van de limiet L. Dus: $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow |\frac{s_{n+1}}{s_n} - L| < \epsilon$. Je wil ernaartoe dat $|s_{n+1}| < a|s_n|$ voor $n > N$ ofwel $|\frac{s_{n+1}}{s_n}| < a$. Ten eerste moet dan dus die $-L$ tussen de absoluuthaken weg. Dus met een herschrijving krijg je dan $-\epsilon + L < |\frac{s_{n+1}}{s_n}| < \epsilon + L$.

9.12b) TB $\lim |s_n| = \infty$.
Omdat $s_n \neq 0\ \forall n$ en omdat er absoluutstokken om s_n zitten, is $|s_n| > 0\ \forall n$. Dus dit is hetzelfde als TB $\lim(\frac{1}{|s_n|})$ (Stelling 9.10).

9.18b) Dit is hetzelfde als $\lim(\frac{1-a^{n+1}}{1-a})$.

3 Hints 2

9.1c) Deel teller en noemer door n^5

9.3) $\lim(a_n * a_n * a_n) = \lim(a_n) \lim(a_n * a_n)$

9.4b) Als $a = b$ dan is ook $\lim(a) = \lim(b)$.

9.9c) Als $\lim(s_n) = \infty$ dan klopt de stelling van (9.9c) wegens (a). Als $\lim(s_n) = -\infty$ dan klopt het omdat een limiet nooit lager kan zijn dan dat. Als $\lim(t_n) = -\infty$ dan klopt het wegens (b). Als $\lim(t_n) = \infty$ dan klopt het omdat een limiet nooit hoger kan zijn dan dat. Dus je kan nu aannemen dat $\lim(s_n), \lim(t_n) \in \mathbb{R}$.

9.10c) Als $\lim(s_n) = \infty$ en $k < 0$ dwz $-k > 0$... En nu lijken de 2 tekstjes nog meer op elkaar, alleen maakt nu nog die min een verschil.

9.11a) Je weet iig dat $\inf \neq \infty$. En als $\inf = \infty$ dan zouden alle s_n groter dan oneindig moeten zijn. Maar s_n zijn allemaal reëel per definitie van een rij.

9.12a) Kies $\epsilon = a - L$. Dan krijg je voor $n > N$ dat $[-a + 2L <]|\frac{s_{n+1}}{s_n}| < a$. Er staat dat het moet gelden voor n groter OF GELIJK N, maar dat is gwn kwestie van alle strikte ongelijkheden in grotergelijktekens te veranderen. Als je dat hebt gedaan, dan heb je een deel van de hint in Ross laten zien.

9.12b) Je kunt (a) alleen toepassen als $L < 1$. Maar bedenk dat $1/L < 1$.

4 Hints 3

9.4b) $\lim s_n = \lim s_{n+1}$, want beide rijen zien er hetzelfde uit op $n = 1$ na (s_1 bestaat bij s_{n+1} namelijk niet).

9.9c) Er worden 2 rijen gegeven met een kleiner-gelijkteken ertussen. En je moet er naartoe dat hetzelfde dan geldt voor de limieten. Dat lijkt op opgave 8.9(a) en 8.9(b). Opgave 8.9 kun je toepassen vanwege je aanname dat je 2 limieten reëel zijn, ofwel dat je 2 rijen convergeren.

9.10c) Als $\lim(s_n) = \infty$ en $k < 0$ dwz $-k > 0$ dan is $\lim(-ks_n) = \infty$.

9.12a) Er staan precies $n - N$ a-tjes met elkaar vermenigvuldigd. En daarvoor staat ook nog eens een "$<$". We hebben bovendien $|\frac{s_{n+1}}{s_n}|$ "$< a$"voor alle $n \geq N$. Onderaan staat $|s_n| < a^{n-N}|s_N|$ ofwel $|\frac{s_n}{s_N}| < a^{n-N}$. Omdat hier s_N in voorkomt, blijkt het handig dat $|\frac{s_{n+1}}{s_n}| < a$ ook geldt voor $n = N$. Want als je $n = N$ invult, dan komt ook daar een s_N voor: $|\frac{s_{N+1}}{s_N}| < a$.

9.12b) Als je uitkomt op iets van de vorm $1/L = \lim(\frac{p_{n+1}}{p_n})$ dan geldt met (a) dat $\lim(p_n) = 0$. Je kunt met de limiet $1/(\lim|\frac{s_{n+1}}{s_n}|)$ stelling 9.2-9.6 toepassen, omdat deze reëel is. Want $0 < 1/L < 1$.

5 Hints 4

9.4b) Isoleer 1 bij $s_{n+1} = \sqrt{s_n + 1}$, dus krijg "$1 = ...$". Hint 1 zal altijd blijven gelden.

9.9c) Probleem nu, is dat aan het rechterlid van de gegeven ongelijkheid en de te bewijzen ongelijkheid geen getal staat. Met een beetje herschrijven, kan dat echter wel.

9.12a) $|\frac{s_{N+1}}{s_N}| < a$, $|\frac{s_{N+2}}{s_{N+1}}| < a$, $|\frac{s_{N+3}}{s_{N+2}}| < a$ enz.
Er volgt: $|\frac{s_{N+1}}{s_N}| * |\frac{s_{N+2}}{s_{N+1}}| * |\frac{s_{N+3}}{s_{N+2}}| * ... * |\frac{s_{N+(n-N)}}{s_{N+(n-N)-1}}| < a^{n-N}$ voor $n > N$.
Omdat s_n voor geen enkele n gelijk is aan nul, valt er wat tegen elkaar weg en krijgen we: $|\frac{s_n}{s_N}| < a^{n-N}$ voor $n > N$.

9.12b) $1/(\lim|\frac{s_{n+1}}{s_n}|) = \frac{\lim(1)}{\lim|\frac{s_{n+1}}{s_n}|} = \lim(\frac{1}{|\frac{s_{n+1}}{s_n}|}) = \lim|1/(\frac{s_{n+1}}{s_n})| = \lim|\frac{1/s_{n+1}}{1/s_n}| = \lim\frac{|1/s_{n+1}|}{|1/s_n|} = \lim(\frac{1/|s_{n+1}|}{1/|s_n|}) = \lim|\frac{1/|s_{n+1}|}{1/|s_n|}|$

6 Hints 5

9.4b) $s_{n+1} = \sqrt{s_n + 1} \Rightarrow s_{n+1}^2 = s_n + 1 \Rightarrow s_{n+1}^2 - s_n = 1 \Rightarrow \lim(s_{n+1}^2 - s_n) = \lim 1 \Rightarrow 1 = \lim(s_{n+1}^2 - s_n) = \lim(s_{n+1}^2) + \lim(-s_n) = \lim(s_{n+1}^2) - \lim(s_n) = \lim(s_{n+1} * s_{n+1}) - \lim(s_n) = \lim(s_{n+1})\lim(s_{n+1}) - \lim(s_n) = \lim(s_n)^2 -$

$\lim(s_n)$. Dit is een kwadratische vergelijking die met de abc-formule uitkomt op 2 oplossingen.

9.9c) De herschrijving is $s_n - t_n \leq 0$. Dit geldt voor alle n groter dan een bepaalde N_0, dus niet voor alle n. Toch kun je nog steeds 8.9 toepassen. Waarom?

9.12a) We willen echter s_n analyseren, dus herschijven ietsjes: $|s_n| < a^{n-N}|s_N|$ voor $n > N$. De limiet van $|s_n|$ weet je nog niet, maar de limiet van degene die ernaast staat, namelijk $a^{n-N}|s_N|$, die kun je weten.

7 Hints 6

9.4b) $\Rightarrow 1 = \lim(s_{n+1}^2 - s_n) = \lim(s_{n+1}^2) + \lim(-s_n) = \lim(s_{n+1}^2) - \lim(s_n) = \lim(s_{n+1} * s_{n+1}) - \lim(s_n) = \lim(s_{n+1})\lim(s_{n+1}) - \lim(s_n) = \lim(s_n)^2 - \lim(s_n)$. Dit is een kwadratische vergelijking die met de abc-formule uitkomt op 2 oplossingen.

9.9c) Omdat de ennen waarvoor het niet geldt, niet uitmaken voor de limiet. Je kunt net zo goed $s_n - t_n$ nemen maar dan als startpunt de eerste n na N_0 (de ennen kleiner dan die n zijn er niet meer), en dan heb je wél dat $s_n - t_n \leq 0 \forall n$. Je hebt nu iets gedaan zonder dat je met de limieten van s_n en t_n hebt gesjoemeld.

9.12a) Stelling 9.7b geeft dat die limiet 0 is als n naar oneindig gaat. Waarom is het zo handig dat de s_n hiernaast, tussen absoluutstokken staat?

8 Hints 7

9.4b) Gebruik opgave 8.9 om te concluderen dat maar 1 oplossing voldoet.

9.12a) Daarom geldt $0 \leq |s_n| < a^{n-N}|s_N|$ en dan kun je nu de knijpstelling gebruiken. Want $a^{n-N}|s_N|$ gaat naar 0 en 0 zelf gaat ook naar 0. Dus gaat $|s_n|$ ook naar 0.

9 Hints 8

9.12a) $\lim(s_n) = 0$ (opgave 8.6a)

10 Antwoorden

9.1a) $\lim \frac{n+1}{n} = \lim \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = \lim \frac{n}{n} + \lim \frac{1}{n} = \lim 1 + \lim \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$
De tweede gelijkheid is stelling 9.3, de vierde stap is stelling 9.7a.

9.1b) $\lim \frac{3n+7}{6n-5} = \lim \frac{3+7/n}{6-5/n} = \frac{\lim(3+7/n)}{\lim(6-5/n)} = \frac{\lim 3+\lim 7/n}{\lim 6+\lim -5/n} = \frac{3+\lim 7(1/n)}{6+\lim -5(1/n)} = \frac{3+7\lim\frac{1}{n}}{6+-5\lim\frac{1}{n}} = \frac{3+7*0}{6+-5*0} = 1/2$
De tweede gelijkheid is stelling 9.6, de derde gelijkheid is stelling 9.3, de vijfde gelijkheid is stelling 9.2, de zesde gelijkheid is stelling 9.7a.

9.1c) $\lim \frac{17n^5+73n^4-18n^2+3}{23n^5+13n^3} = \lim \frac{17+73/n-18/n^3+3/n^5}{23+13/n^2} = \frac{\lim(17+73/n-18/n^3+3/n^5)}{\lim(23+13/n^2)} =$

$\frac{\lim(17)+\lim(73/n)+\lim(-18/n^3)+\lim(3/n^5)}{\lim(23)+\lim(13/n^2)} = \frac{17+73\lim(1/n)-18\lim(1/n^3)+3\lim(1/n^5)}{23+13\lim(1/n^2)}$

$= \frac{17+73*0-18*0+3*0}{23+13*0} = \frac{17}{23}$
De tweede gelijkheid is stelling 9.6, de derde gelijkheid is stelling 9.3, de vierde gelijkheid is stelling 9.2, de vijfde gelijkheid is stelling 9.7a.

9.3) $\lim s_n = \lim \frac{a_n^3+4a_n}{b_n^2+1} = \frac{\lim(a_n^3+4a_n)}{\lim(b_n^2+1)} = \frac{\lim a_n^3+\lim 4a_n}{\lim b_n^2+\lim 1} = \frac{\lim((a_n)(a_n)(a_n))+4\lim(a_n)}{\lim((b_n)(b_n))+1}$

$= \frac{\lim(a_n)\lim((a_n)(a_n))+4a}{\lim(b_n)\lim(b_n)+1} = \frac{a\lim(a_n)\lim(a_n)+4a}{b*b+1} = \frac{a*a*a+4a}{b^2+1} = \frac{a^3+4a}{b^2+1}$

9.4a) $[1, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}+1}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}]$

9.4b) $s_{n+1} = \sqrt{s_n+1} \Rightarrow s_{n+1}^2 = s_n + 1 \Rightarrow s_{n+1}^2 - s_n = 1 \Rightarrow \lim(s_{n+1}^2 - s_n) = \lim 1 \Rightarrow 1 = \lim(s_{n+1}^2 - s_n) = \lim(s_{n+1}^2) + \lim(-s_n) = \lim(s_{n+1}^2) - \lim(s_n) = \lim(s_{n+1} * s_{n+1}) - \lim(s_n) = \lim(s_{n+1})\lim(s_{n+1}) - \lim(s_n) = \lim(s_n)^2 - \lim(s_n)$. Dit is een kwadratische vergelijking die met de abc-formule uitkomt op 2 oplossingen, namelijk: $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ en $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. De aanname was dat de rij convergeert, dus dat de limiet een reëel getal is. Dus 1 oplossing voldoet en 1 voldoet niet. De tweede oplossing is negatief. Maar alle s_n zijn positief, omdat 1 positief is en een wortel ook. Met opgave 8.9a) geldt dat $s_n \geq 0 \Rightarrow \lim(s_n) \geq 0$. Dus de tweede oplossing voldoet niet, dus $\lim(s_n) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

9.6a) $x_{n+1} = 3x_n^2 \Rightarrow \lim(x_{n+1}) = \lim(3x_n^2) \Rightarrow a = 3\lim(x_n * x_n) =$

$3\lim(x_n)(x_n) = 3\lim(x_n)\lim(x_n) = 3a * a = 3a^2 \Rightarrow a = 3a^2 \Rightarrow 3a^2 - a = 0 \Rightarrow a(3a-1) = 0 \Rightarrow a = 0 \ V \ a = 1/3$.
9.6b) De rij gaat naar ∞ en dan bestaat de limiet, dus ja.
9.6c) De manier waarop a is bepaald, gaat ervan uit dat a reëel is dus zeker niet ∞ of $-\infty$ (Herinnering: op de middelbare heb je vaak x opgelost en dat was dan altijd binnen $\mathbb{R}$.) Maar de 2 oplossingen die je dan hebt gevonden, hoeven nog niet te voldoen. In dit geval voldoen ze allebei niet. Dan kan het alleen nog zijn dat $\lim(x_n) = \infty$ en $\lim(x_n) = \infty$. En dat eerste is het geval.

9.9a) TB $\lim(s_n) = \infty \Rightarrow \lim(t_n) = \infty$.
$\forall M > 0 \exists N_0$ zdd $n > N_0$ geeft $t_n \geq s_n > M$.

9.9b) TB $\lim(t_n) = -\infty \Rightarrow \lim(s_n) = -\infty$.
$\forall M < 0 \exists N_0$ zdd $n > N_0$ geeft $s_n \leq t_n < M$

9.9c) Als $\lim(s_n) = \infty$ dan klopt de stelling wegens (a). Als $\lim(s_n) = -\infty$ dan klopt het omdat een limiet nooit lager kan zijn dan dat. Als $\lim(t_n) = -\infty$ dan klopt het wegens (b). Als $\lim(t_n) = \infty$ dan klopt het omdat een limiet nooit hoger kan zijn dan dat. Maar stel nu dat $\lim(s_n), \lim(t_n) \in \mathbb{R}$, dus dat beide rijen convergeren. Dan mag je opgave 8.9 erbij halen. Er geldt: $s_n \leq t_n \forall n > N_0$. Verander nu wat aan s_n en t_n zonder dat hun limieten veranderen: neem als startpunt de eerste n na N_0, gooi dus de ennen kleiner dan die eerste n weg. Nu geldt $s_n \leq t_n \forall n \Rightarrow t_n - s_n \geq 0 \forall n \Rightarrow \lim(t_n - s_n) \geq 0$ (opgave 8.9a)$\Rightarrow \lim(t_n) - \lim(s_n) \geq 0 \Rightarrow \lim(t_n) \geq \lim(s_n)$

9.10a) $\forall M > 0 \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow s_n > \frac{M}{k} \Rightarrow k * s_n > M$

9.10b) "$\Rightarrow$": $\forall M < 0 \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow s_n > -M \Rightarrow -s_n < M$

"$\Leftarrow$": $\forall M > 0 \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow -s_n < -M \Rightarrow s_n > M$

(Opmerking: Het bewijs bestaat uit 3 delen: het deel vóór de eerste "$\Rightarrow$ ...", het deel voor de tweede "$\Rightarrow$ ..." en het deel erna. De volgorde van dit bewijs was: eerst het eerste deel opschrijven, dan het derde deel. Zo krijg je het TB. Ten slotte is het tweede deel ertussen geplaatst met de gedachte dat deze logisch volgt uit het eerste gedeelte, vanwege de aanname dat $\lim(s_n) = \infty$. En toen was je klaar.)

9.10c) Als $\lim(s_n) = \infty$ en $k < 0$ dwz $-k > 0$ dan is $\lim(-ks_n) = \infty$ (*) wegens (a).
We willen $\lim(ks_n) = -\infty$. Dat krijgen we als volgt, met (*) als aanname:
$\forall M < 0 \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow -ks_n > -M \Rightarrow ks_n < M$

9.11a) $\inf \neq -\infty$ en omdat elke s_n een reëel getal is per definitie van een rij, geldt dat $\inf \neq \infty$. Anders zouden alle $s_n > \infty$. Geen enkele s_n is dan nog reëel. Dus $\inf \in \mathbb{R}$.
$\forall M > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow s_n > M - \inf \Rightarrow s_n + t_n \geq s_n + \inf > M$

9.11b) Stel $\lim(t_n) = \infty$. Dan geldt: $\forall M > 0 \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow s_n + t_n > M + M = 2M$. Dus dan is $\lim(s_n + t_n) = \infty$.
Stel nu dat $\lim(t_n) \neq \infty$. Het is ook niet gelijk aan $-\infty$, dus het is reëel. Dus t_n convergeert. Dus t_n is begrensd (stelling 9.1). Dus $existsp \in \mathbb{R}$ zdd $-p \leq t_n \leq p$.
$\forall \epsilon > 0\ existsN$ zdd $n > N \Rightarrow s_n + t_n > M + -p$. Dus $\lim(s_n + t_n) = \infty$.

9.11c) Dat is al in (b) gedaan.

9.12a) Omdat $\lim |\frac{s_{n+1}}{s_n}| = L$, geldt dat voor $\epsilon = a - L\ \exists N$ zdd $n \geq N \Rightarrow ||\frac{s_{n+1}}{s_n}| - L| < a - L$ dwz $[-a + 2L <]|\frac{s_{n+1}}{s_n}| < a$
Dus $|\frac{s_{N+1}}{s_N}| < a$, $|\frac{s_{N+2}}{s_{N+1}}| < a$, $|\frac{s_{N+3}}{s_{N+2}}| < a$ enz.
Er volgt: $|\frac{s_{N+1}}{s_N}| * |\frac{s_{N+2}}{s_{N+1}}| * |\frac{s_{N+3}}{s_{N+2}}| * ... * |\frac{s_{N+(n-N)}}{s_{N+(n-N)-1}}| < a^{n-N}$ voor $n > N$.
Omdat s_n voor geen enkele n gelijk is aan nul, valt er wat tegen elkaar weg en krijgen we: $|\frac{s_n}{s_N}| < a^{n-N}$ ofwel $|s_n| < a^{n-N}|s_N|$ ofwel $0 \leq |s_n| < a^{n-N}|s_N|$ (**)
Omdat $a < 1$ is $\lim_{n->\infty}(a^{n-N}) = 0$ (***). Met (**), (***) en de knijpstelling volgt dat $\lim |s_n| = 0$. Met opgave (8.6a) volgt dat dan $\lim(s_n) = 0$.

9.12b) TB $\lim |s_n| = \infty$.
Omdat $s_n \neq 0\ \forall n$ en omdat er absoluutstokken om s_n zitten, is $|s_n| > 0\ \forall n$. Dus dit is hetzelfde als TB $\lim(\frac{1}{|s_n|})$ (Stelling 9.10).
$0 < 1/L < 1$ ofwel $0 < 1/(\lim |\frac{s_{n+1}}{s_n}|) < 1$. We hebben dus een reële limiet, dus kunnen we Stelling 9.2-9.6 gwn toepassen. Dus $1/(\lim |\frac{s_{n+1}}{s_n}|) = \frac{\lim(1)}{\lim |\frac{s_{n+1}}{s_n}|} = \lim(\frac{1}{|\frac{s_{n+1}}{s_n}|}) = \lim |1/(\frac{s_{n+1}}{s_n})| = \lim |\frac{1/s_{n+1}}{1/s_n}| = \lim \frac{|1/s_{n+1}|}{|1/s_n|} = \lim(\frac{1/|s_{n+1}|}{1/|s_n|}) = \lim |\frac{1/|s_{n+1}|}{1/|s_n|}|$. Volgens (a) is $1/|s_n| = 0$.

9.17) TB $\forall M > 0\ \exists N$ zdd $n > N \Rightarrow M > n^2$.
Stel $M > 0$ en kies $N = M$
Dan geeft $n > N$ dat $n^2 \geq n > M$

9.18a) Dit is hetzelfde als TB dat $(1 + a + a^2 + ... + a^n)(1 - a) = 1 - a^{n+1}$.
$(1+a+a^2+...+a^n)(1-a) = 1+a+a^2+...+a^n - a(1+a+a^2+...+a^n) = 1 + a + a^2 + ... + a^n - a - a^2 - a^3 - ... - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}$.

9.18b) $\lim(1+a+a^2+...+a^n) = \lim(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}) = \frac{\lim(1-a^{n+1})}{\lim(1-a)} = \frac{\lim(1)-\lim(a^{n+1})}{1-a} = 1/(1-a)$

9.18c) Hier is $a = 1/3$. Dan krijg je dus $\lim(\frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3}) = \lim(1/(2/3)) = 3/2$.

9.18d) ∞ (Opmerking: alleen al die a^n aan het eind van de som gaat naar ∞).